

## **Efeito da Rigidez Torcional na Distribuição de Carregamentos Móveis em Tabuleiros de Pontes de Vigas Múltiplas**

**Henrique Dinis<sup>1</sup>, Alfonso Pappalardo Jr<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>UPM / Engenharia Civil / [dinis@mackenzie.br](mailto:dinis@mackenzie.br)

<sup>2</sup>UPM / Engenharia Civil / [alfonso.pappalardo@mackenzie.br](mailto:alfonso.pappalardo@mackenzie.br)

### **Resumo**

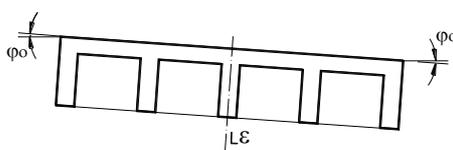
Os projetos de pontes têm evoluído continuamente, não somente pelos avanços dos recursos computacionais, como também, pelo desenvolvimento de novos materiais e técnicas construtivas. Os sistemas computacionais dedicados ao cálculo estrutural introduziram métodos avançados de análise, como o Método dos Elementos Finitos, que possibilitam a determinação dos esforços nos elementos estruturais de diversas formulações matemáticas: vigas segundo teorias clássicas (Euler-Bernoulli) e avançadas (Timoshenko), grelhas, placas (Kirchhoff, Reisser-Mindlin), cascas. O que se verifica, atualmente, é a redução do uso de hipóteses simplificadoras nos modelos de cálculo, como eram normalmente assumidas nos métodos convencionais de cálculo. Estas simplificações levavam a uma superavaliação dos esforços e, conseqüentemente, a um maior nível de segurança para as estruturas, quando assim consideradas, que asseguravam o funcionamento adequado de determinados padrões de detalhamento. Ao se assumir modelos de cálculo mais realistas, mantendo-se os padrões de detalhamento anteriores, observa-se que a redução das reservas estruturais pode, eventualmente, levar a várias anomalias estruturais, como maior nível de fissuração, surgimento de zonas de plastificação excessiva e maior fadiga dos materiais, que podem reduzir a durabilidade das estruturas. A simplificação mais aceita nos projetos estruturais de pontes, no caso de tabuleiros de vigas múltiplas, foi a não consideração da rigidez à torção das vigas na distribuição dos esforços, que acentua favoravelmente o efeito da distribuição das cargas móveis entre longarinas, sendo este considerado conservador nos processos de dimensionamento. Este trabalho avalia a questão da redução de reservas estruturais ao se considerar a rigidez à torção de vigas nos modelos de cálculo. Desenvolve a argumentação a partir do estudo teórico das estruturas de tabuleiros de vigas múltiplas, quando considerado o efeito torcional. Para concluir os estudos, será desenvolvido um modelo de elementos finitos de modo a demonstrar os efeitos analisados, comparando-se graus de distribuição de carregamentos móveis com e sem a consideração da rigidez à torção das vigas isoladas.

### **Palavras-chave**

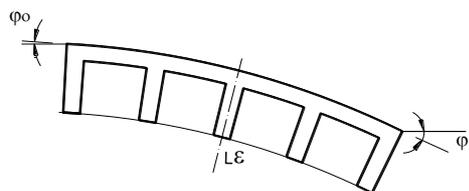
Projeto de pontes; Tabuleiros de vigas múltiplas; Rigidez à torção.

## Introdução

Os tabuleiros de pontes têm características específicas que os distinguem das demais estruturas planas. Por serem obras cuja finalidade primordial é a de transposição de obstáculos, configuram-se como sistemas estruturais axiais, desenvolvendo-se ao longo de um eixo. Em termos de análise estática, tais sistemas podem se subdividir em unidimensionais e bidimensionais, podendo-se considerar, para melhor definição da análise estrutural, que os unidimensionais não apresentam deflexões transversais, por flexão, e os bidimensionais, sim.



SISTEMAS UNIDIMENSIONAIS



SISTEMAS BIDIMENSIONAIS

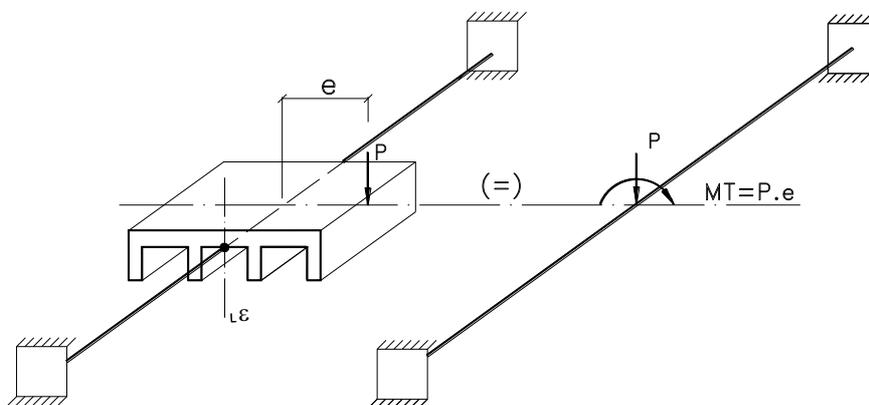
Neste trabalho, aborda-se apenas os sistemas estruturais que se caracterizam como unidimensionais, cuja resolução pode ser reduzida para a forma analítica linear. A questão que se coloca são os resultados na determinação dos esforços decorrentes das cargas móveis em pontes, quando obtidos pelos métodos de cálculo simplificadores em tabuleiros de vigas múltiplas. Estas simplificações, em vários destes métodos, desconsideram a rigidez à torção uniforme dos elementos individuais que compõe tais tabuleiros, na distribuição dos carregamentos para as longarinas, levando em conta, para tanto, somente a rigidez do conjunto decorrente do trabalho individual das longarinas à flexão. Tal simplificação é favorável para a determinação dos esforços nas longarinas, superestimando os esforços de flexão.

Estes métodos simplificadores foram muito utilizados até poucos anos atrás, ainda em uso, atualmente, inclusive, mas tendo perdido sua eficácia, a partir do surgimento dos métodos computacionais, mais especificamente, o método dos elementos finitos, que reproduz com maior fidelidade, os esforços que atuam nas longarinas como resultado da aplicação das cargas móveis. As estruturas, desta forma, passam a ser dimensionadas com esforços mais realistas, menores que aqueles determinados pelos métodos simplificadores manuais, contribuindo para uma maior esbeltez das estruturas.

Esta maior economia no dimensionamento não se configura como uma redução da segurança estrutural, mas somente, como um dimensionamento mais realista. No entanto, a superavaliação dos esforços de flexão, resultado da aplicação dos métodos manuais simplificadores, de certa forma, camufla eventuais vícios no dimensionamento das estruturas, que podem levar a eventuais sintomas patológicos, se considerada uma análise estrutural mais realista, em especial, havendo um detalhamento inadequado das armaduras. Esta situação é mais flagrante quando o arranjo das armaduras é mais suscetível à variação das tensões de trabalho estrutural, podendo induzir, por exemplo, a uma superavaliação do nível de abertura de fissuras, ou fadiga das armaduras, pois os métodos simplificadores levariam indiretamente a um nível de segurança, quanto aos Limites de Utilização das estruturas, maior do que se encontra em uma análise mais realista.

## Avaliação da Rigidez à Torção nos Tabuleiros de Vigas Múltiplas de Pontes

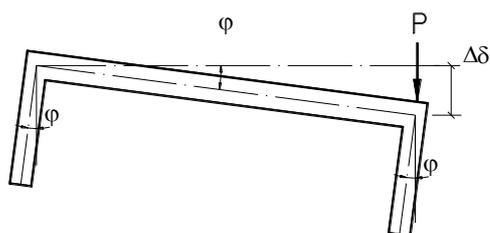
Avalia-se neste trabalho os sistemas unidimensionais, que se supõe rígidos à flexão, transversalmente. Desta consideração, assume-se que as deformações à flexão que ocorrem na direção transversal podem ser consideradas desprezíveis se comparadas àquelas que ocorrem na direção longitudinal. Os tabuleiros assim concebidos podem ser avaliados como uma viga única submetida aos efeitos de flexão e torção e podem ter seus esforços avaliados, transportando-se todos carregamentos aplicados no plano horizontal do tabuleiro, para seu eixo, transformando-os em um carregamento unidirecional. A partir desta consideração, os mesmos são distribuídos para as várias longarinas, segundo as características dos carregamentos, da geometria dos tabuleiros e da rigidez dos elementos estruturais que compõe o tabuleiro.



Nestas circunstâncias, os tabuleiros são avaliados para dois efeitos: os de flexão, causados pela ação da carga  $P$  e os de torção, pela ação do momento  $MT$ .

### Considerações sobre os Tabuleiros com duas Longarinas

Para que os tabuleiros de vigas múltiplas de pontes sejam tratados como monolíticos, ou seja, para que não ocorra deflexões entre as longarinas, devem ser previstas transversinas intermediárias. Para esta condição, qualquer deformação diferencial por flexão entre longarinas será interpretada como deformações decorrentes das rotações torcionais. Em tabuleiros de duas longarinas, a questão pode ser desenvolvida conceitualmente, como a seguir.

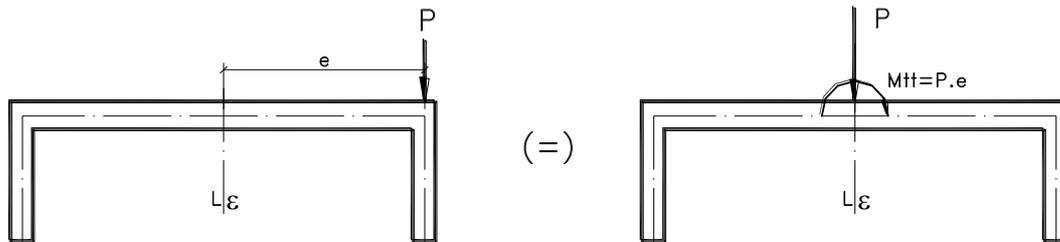


$\Delta\delta$ : Deformação

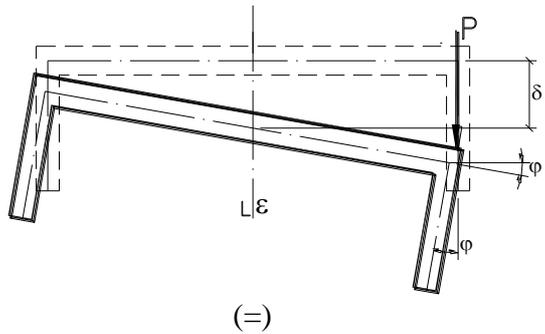
$\varphi$ : Rotação

O problema poderia ser melhor interpretado, se subdividido em dois casos de carregamentos distintos. Estudando-se o problema a partir de uma seção transversal localizada no centro do vão, teremos:

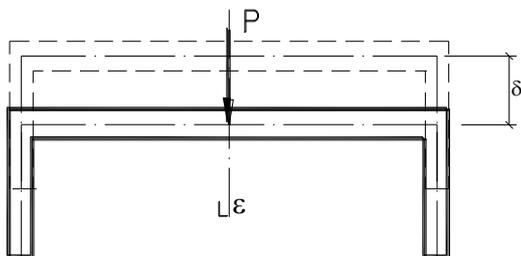
*Esquema de Carregamentos*



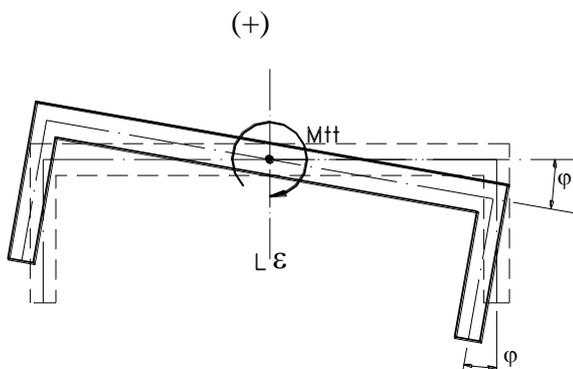
*Esquema de Deformações*



Efeito total



Deformação por translação



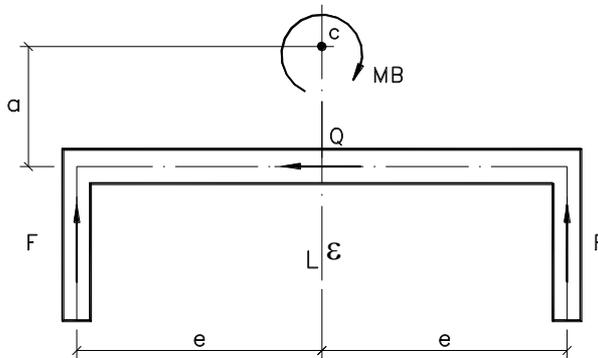
Deformação por rotação

Relativamente ao efeito da deformação de translação, a carga  $P$ , simétrica, se subdividirá igualmente para as duas longarinas. Já para o efeito da deformação de rotação, no entanto, o momento torçor total  $M_{tt}$  é absorvido pela rigidez à deformação angular da seção.

Os tabuleiros com duas longarinas, tratando-se de perfis de seção aberta, na análise do efeito de torção, considera-se dois efeitos, o primeiro,  $MB$ , refere-se às tensões normais causadas pelo empenamento da seção, efeito este designado por flexo-torção e o segundo,  $MT$ , às tensões tangenciais decorrentes da torção uniforme.

$$M_{tt} = MB + MT \quad (1)$$

Para análise da flexo-torção, devemos estabelecer os fluxos de cortantes que se desenvolvem em cada uma de suas barras. Para os perfis abertos, em seção  $U$ , o sentido das forças cortantes não é contínuo, como pode se verificar no esquema abaixo:

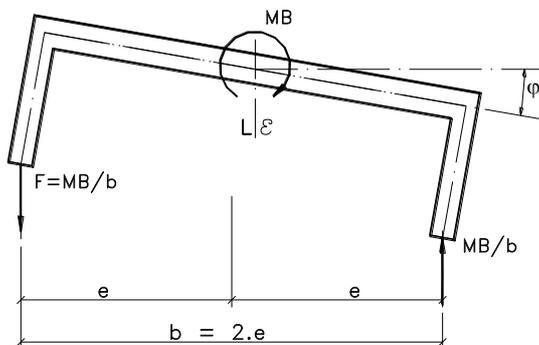


O momento  $MB$  pode ser desmembrado através de três parcelas, cada uma correspondendo aos momentos gerados pelas forças cortantes até o centro de torção  $C$ .

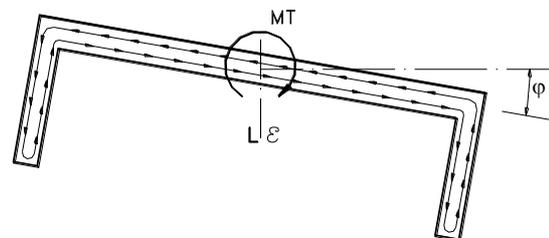
$$MB = Q \cdot a + 2F \cdot e \quad (2)$$

Se levarmos em conta a indeslocabilidade e pequena deformabilidade da laje, à flexão horizontal, relativamente à deformabilidade vertical das vigas, também à flexão, verificamos que o fluxo  $Q$  de tensões, relativamente às tensões de cisalhamento da torção, pode ser considerado nulo e, assim, o efeito de flexo-torção se desenvolverá unicamente através do flexionamento das vigas, formando um binário de forças.

Assim, as parcelas  $MB$  e  $MT$ , que compõe  $M_{tt}$ , podem ser visualizadas como a seguir:



Efeito de Flexo-torção -  $MB$



Efeito de Torção Uniforme -  $MT$

O momento  $M_{tt}$ , então, se subdivide nas parcelas correspondentes aos efeitos de binário de forças e da resistência à torção uniforme, em proporção direta à rigidez que cada um destes efeitos desenvolve relativamente à rotação angular da seção, dispensando demonstração.

### Distribuição dos Carregamentos Verticais em Tabuleiros de duas Longarinas

A resolução deste problema é dos mais complexos, uma vez que suas variáveis dependem não só das características geométricas da seção, mas também do tipo e localização de cada carregamento. Como particularidade, cabe aqui determinar as parcelas de MB e MT que compõe um momento  $M_{tt}$ , quando aplicado no meio do vão de um tabuleiro de seção com duas longarinas.

Considerando que para uma mesma rotação angular  $\varphi$ , causada por um momento torçor  $M_{tt}$ , a partição entre MB e MT ocorrerá proporcionalmente às respectivas rigidezes à torção,  $K_B$  e  $K_T$ , a partição do momento  $M_{tt}$ , então, ocorrerá segundo as expressões a seguir, dispensando demonstração:

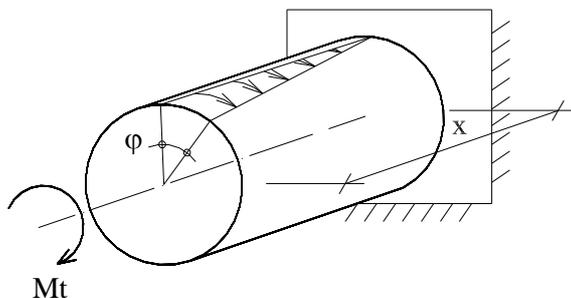
$$MB = M_{tt} \cdot K_B / K_B + K_T \quad (3)$$

$$MT = M_{tt} \cdot K_T / K_B + K_T \quad (4)$$

Cabe agora determinar o valor da rigidez relativa para cada um destes dois efeitos, o da flexo-torção  $K_B$ , e o da torção uniforme  $K_T$ , relativos a uma rotação angular da seção  $\varphi$ .

#### Rigidez à Torção Uniforme $K_T$

Segundo a Resistência dos Materiais, temos:



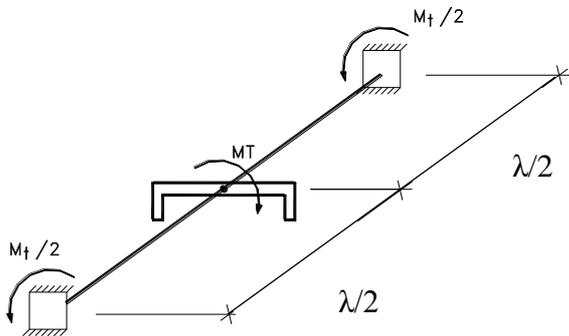
$$\varphi = M_{t.x} / G.I_t \quad (5)$$

sendo:

$G$  = módulo transversal do material

$I_t$  = momento de inércia à torção

Considerando, para a análise, uma seção do meio do vão, mediante a aplicação de um momento torçor específico “MT”.

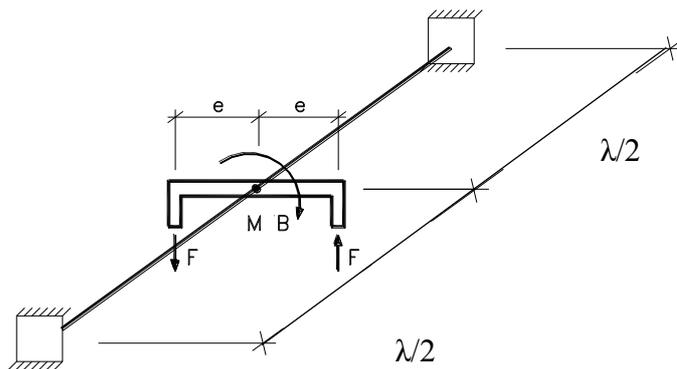


Para o meio do vão, com  $x = \lambda/2$  e sendo  $\varphi = MT / K_T$ , aplicando-se em (5), resulta:

$$K_T = 4 G \cdot I_t / \lambda \quad (6)$$

### Rigidez à Flexo-torção $K_B$

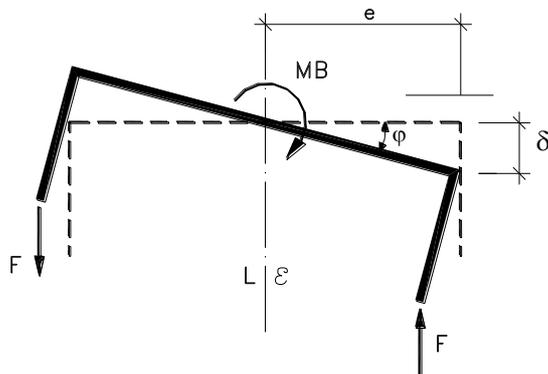
Tomando como exemplo o mesmo esquema utilizado para a torção uniforme e mediante, agora, à aplicação de um momento torçor específico “MB”, teremos:



Segundo a Resistência dos Materiais, a deformação por flexão causada por uma carga concentrada, no centro do vão, vale:

$$\delta = F \cdot \lambda^3 / 48 E \cdot I \quad (7)$$

A torção angular da seção ocorre pelo efeito de flexão das duas vigas, mediante a aplicação das forças F:



De acordo com esta configuração estrutural, obtêm-se a expressão, de imediato:

$$F = MB / 2 \text{ e} \quad (8)$$

Considerando a relação (8) indicada, aplicada em (7), a deformação  $\delta$  será:

$$\delta = MB \cdot \lambda^3 / 96 E \cdot I \cdot e \quad (9)$$

Sabendo-se que  $MB = \varphi \cdot K_B$ , da expressão (9), obtém-se:

$$K_B = 96 E \cdot I \cdot e^2 / \lambda^3 \quad (10)$$

Com as rigidezes  $K_T$  e  $K_B$  determinadas e com as expressões de partições do momento à torção  $M_{tt}$ , (3) e (4), pode-se então, determinar  $M_T$  e  $M_B$  e então, proceder ao cálculo dos esforços de dimensionamento.

### Aplicação das Formulações

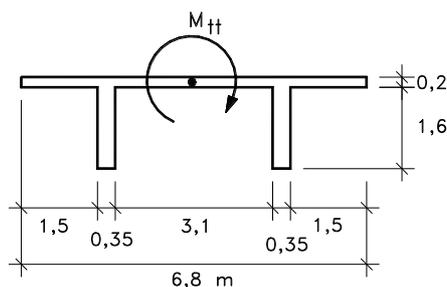
Assumindo valores numéricos, pode-se determinar as parcelas  $K_B$  e  $K_T$ . A seguir, apresenta-se uma aplicação das formulações, relativa à tipologia de tabuleiros de pontes com duas longarinas protendidas. Obtém-se, com esta aplicação, um referencial para partições de momentos torçores em tabuleiros de concreto.

Deseja-se avaliar, a partir destes resultados, a magnitude das margens de segurança conferida pela não consideração da rigidez à torção uniforme na determinação dos carregamentos nas longarinas e suas cortantes, em tabuleiros de duas vigas.

#### *Estudo para um tabuleiro com vão de 30,0m, em concreto protendido*

Para validade da formulação, prevê-se a existência de transversinas intermediárias infinitamente rígidas, com ligações fixas nas longarinas e apoios das vigas, articulados.

#### Seção do Tabuleiro



$$M_{tt} = 100,0 \text{ kNm}$$

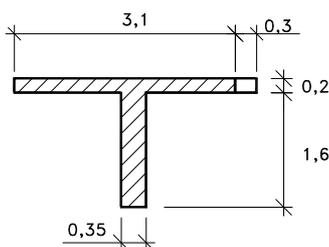
$$G = 0,45 E$$

Momento de Inércia à flexão:

$$I = 0,3598 \text{ m}^4$$

Momento de inércia a torção  $I_t$ :

$$I_t = \frac{6,8 \cdot 0,2^3}{3} + \frac{2 \cdot 1,8 \cdot 0,35^3}{3} = 0,0696 \text{ m}^4$$



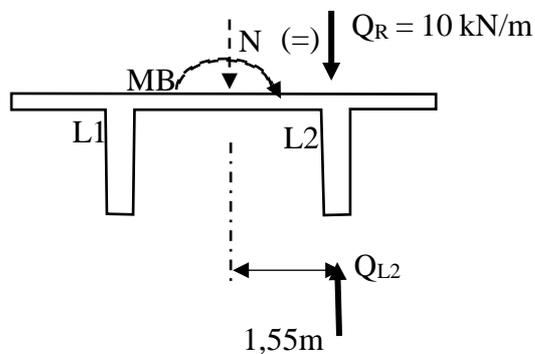
$$K_B = 96.E.I.e^2 / \lambda^3 = 96 \cdot 0,3598 \cdot 1,725^2 \cdot E / 30^3 = 0,00381.E$$

$$K_T = 4.G.I_t / \lambda = 4 \cdot 0,0696 \cdot 0,45 \cdot E / 30 = 0,00412.E$$

$$MB = M_{tt} \cdot K_B / (K_B + K_T) = 48,0 \text{ kNm}$$

$$MT = M_{tt} \cdot K_T / (K_B + K_T) = 52,0 \text{ kNm}$$

Como exposto, podemos interpretar que 52% do momento torçor total  $M_{tt}$  será absorvido pelo efeito da resistência à torção pura  $MT$  e, 48%, pelo efeito do binário de forças  $MB$ . Se for aplicado um carregamento unifilar uniformemente distribuído, ao longo de uma das longarinas do exemplo em análise, o momento que decorre pelo efeito do binário de forças  $MB$ , será:



$$N = 10 \text{ kN/m}$$

$$M_{tt} = 10 \cdot 1,55 = 15,5 \text{ kNm/m}$$

$$MB = 0,48 M_{tt} = 0,48 \cdot 15,5 = 7,44 \text{ kNm/m}$$

A parte do carregamento vertical  $Q_R$ , que será absorvido pela longarina  $L_2$ , será:

$$Q_{L2} = MB / 3,1\text{m} + N / 2 = 7,44 / 3,1 + 10,0 / 2 = 7,4 \text{ kN/m}$$

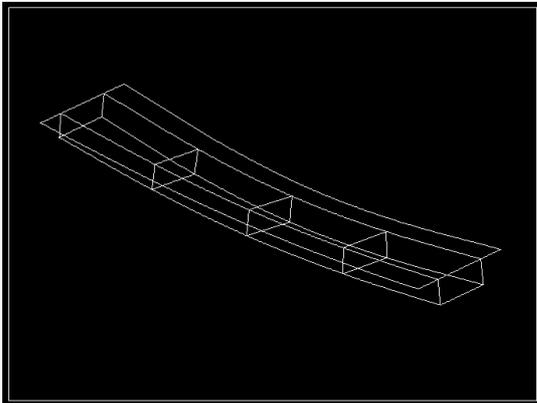
Seguindo este raciocínio, a cortante na longarina  $L_2$ , junto ao apoio, será:

$$V_{L2} = 7,4 \cdot 30/2 = 111 \text{ kN}$$

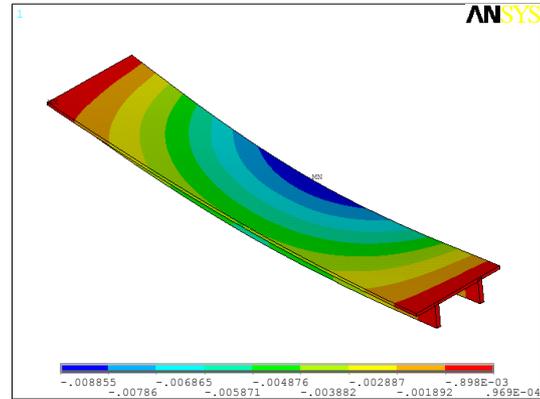
Verifica-se, que se fosse desconsiderado a rigidez à torção no referido exemplo, a parcela da carga  $Q_R$  que seria absorvida pela longarina  $L_2$  corresponde ao próprio carregamento aplicado, qual seja,  $Q_{L2} = Q_R = 10 \text{ kN/m}$ , e a Cortante,  $V_{L2} = 150 \text{ kN}$ , percebendo-se uma superavaliação de 2,6 kN/m para o carregamento, ou seja, de 26% relativamente ao carregamento total.

No entanto, deve-se ter em conta que o coeficiente de partição obtido se refere à aplicação de um momento no centro do vão, que corresponde à máxima rotação angular admitida para a viga. Em seções intermediárias, a partição será menor e, junto aos apoios, tende a eliminar a parte do efeito da torção pura, não havendo partição. Para se avaliar a variação da partição ao longo do vão, foi efetuado um processamento por elementos finitos de placa, utilizando o *software* ANSYS, cuja formulação captura efeitos de flexão no plano e fora do plano. A simulação computacional reproduz a aplicação do exemplo apresentado, como mostram as imagens, a seguir, tendo-se obtido Cortantes de 124 kN, ligeiramente maiores que as calculadas com o coeficiente de partição para a seção do meio do vão, de 111 kN, constatando-se, ainda, a superavaliação dos esforços no

dimensionamento à flexão, ao não se considerar a rigidez à torção uniforme, como queria-se demonstrar.



Geometria



Resultados para deslocamentos verticais (m)

## Conclusões

O intuito deste trabalho foi trazer o entendimento de como os métodos manuais com hipóteses simplificadoras de cálculo podem criar referenciais equivocados, que se refletem nas práticas de dimensionamento, devendo tais práticas, serem revistas, ao se utilizar métodos mais realistas na obtenção dos esforços, como os de elementos finitos.

A formulação desenvolvida objetivou mostrar como simplificações utilizadas, no caso, torção em tabuleiros de duas longarinas, superestimam os esforços à flexão, apontando onde e em que nível, incidem tais simplificações, para que no detalhamento, o projetista possa decidir sobre a manutenção ou não de certas práticas tradicionais para o detalhamento das estruturas. Verifica-se, por exemplo, que em pontes com vigas pré-moldadas protendidas, nas verificações no Estado Limite de Utilização, para abertura de fissuras e descompressão, métodos mais precisos para o cálculo dos esforços deverão ser acompanhados de maior acuidade, quanto às verificações dos níveis de serviço.

Por fim, cabe colocar que as próprias novas ferramentas de cálculo, como o MEF, também conservam algumas hipóteses simplificadoras, cujos resultados, mesmo considerados mais realistas, não podem, em hipótese alguma, serem tratados como exatos.

## Referências

- CEDOLIN, L. Stability of Structures. 1. ed. Rio de Janeiro: Dover Publications, 2003.
- LANGENDONCK, T.V. Resistência dos Materiais: Deformações. Vol II. São Paulo: Edgard Blücker, (sem data).
- MARTHA, L.F. Análise das estruturas. 1. ed. São Paulo: Elsevier, 2010.
- RILEY, William F.; STURGES, L. D.; MORRIS, D. H. Mecânica dos Materiais. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.
- TIMOSHENKO, S. Resistência dos Materiais. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1985.