

Verificação de Seções de Concreto Armado Utilizando a Curva de Sargin

J. N. Kabenjabu^a & M. Schulz^b

^a Mestre em Engenharia Civil pela Universidade Federal Fluminense, Departamento de Engenharia Civil,
joelkabenjabu@id.uff.br;

^b Professor da Universidade Federal Fluminense, Departamento de Engenharia Civil, mschulz@id.uff.br

Resumo

O uso de relações constitutivas simplificadas no dimensionamento de seções transversais é ajustado por especificações de norma, tais como as deformações limites do diagrama de domínios. Estas relações tensão-deformação simplificam a construção de diagramas de interação e os procedimentos numéricos, mas não representam diversas características do concreto, tais como o módulo de elasticidade na origem e o ramo descendente do diagrama tensão-deformação. A curva de Sargin descreve acuradamente o módulo de elasticidade na origem e representa o ramo descendente da relação tensão-deformação. Entretanto, processos numéricos tradicionais apresentam problemas de convergência no ramo descendente da curva de Sargin. Esta pesquisa apresenta um método numérico de dimensionamento baseado no processo do arco-cilíndrico que é numericamente eficiente no ramo descendente da curva de Sargin.

Abstract

The use of simplified constitutive relations in reinforcement design of concrete cross-sections is adjusted by code specifications, such as the limit deformations of the interaction diagram. These stress-strain relationships simplify the construction of interaction diagrams and numerical procedures, but do not represent several characteristics of concrete, such as the modulus of elasticity at the origin and the descending branch of the stress-strain diagram. The Sargin curve accurately describes the modulus of elasticity at the origin and represents the descending branch of the stress-strain relation. However, traditional numerical processes present convergence problems in the descending branch of the Sargin curve. This research presents a numerical method for reinforcement design based on the arc length process that is numerically efficient in the descending branch of the Sargin curve.

Palavras-chave

Concreto armado, dimensionamento de seções de concreto, curva de Sargin, processo do arco-cilíndrico.

Keywords

Reinforced concrete, design of concrete cross-sections, Sargin curve, arc-length method.

1. Introdução

Diferentes relações constitutivas têm sido utilizadas para o dimensionamento de vigas e colunas de concreto. Mörsch [1] considerou o comportamento elástico-linear dos materiais e o método das tensões admissíveis. Vários autores contribuíram para o modelo de flexão atualmente utilizado para o dimensionamento no estado limite último. Teorias simplificadas para o dimensionamento à flexão e ao esforço normal foram consolidadas no início da década de 60 usando relações constitutivas aproximadas para concreto sem qualquer perda significativa de precisão. Mattock, Kriz e Hognestad [2] adotaram o diagrama retangular, enquanto Rüschi, Grasser e Rao [3] usaram o diagrama parábola-retângulo.

A aproximação do diagrama retangular é atualmente adotada no ACI 318-14 [4]. O CEN Eurocode 2: 2004 [5], a FIB Model Code 2010 [6] e a ABNT NBR 6118: 2014 [7] usam o diagrama parábola-retângulo. Os diagramas aproximados simplificam procedimentos numéricos e a geração de ábacos, mas não representam certas características do concreto, como o módulo de elasticidade na origem e o ramo descendente da relação de tensão-deformação.

As análises físicas e geométricas não lineares de estruturas de concreto armado requerem relações tensão-deformação que melhor descrevem o comportamento do concreto. A curva de Sargin [8] representa várias características do comportamento uniaxial do concreto. A curva Sargin apresentada no Código modelo CEB-FIP 1990 [9] é definida pelo módulo de elasticidade na origem, as tensões mínima e máxima de compressão e o ramo descendente da relação tensão-deformação.

A convergência do método Newton-Raphson não é estável em ramos descendentes de curvas de tensão-deformação. Esta pesquisa apresenta um método numérico de dimensionamento de seções transversais baseado no processo do arco-cilíndrico, que é numericamente eficiente no ramo descendente da curva de Sargin. A solução proposta não requer distribuições de deformações que giram em torno do pivô C no domínio 5, mas pode incluir deformações limites do concreto e do aço para evitar deformações excessivas.

A validação é realizada por meio de exemplos que comparam os resultados do diagrama parábola-retângulo e da curva de Sargin. Os exemplos apresentam o dimensionamento das seções utilizando respectivamente o diagrama parábola-retângulo e curva de Sargin.

2. Hipóteses simplificadoras

As seguintes hipóteses são adotadas para a verificação e o dimensionamento de seções de concreto armado:

- 1 - Não há deslocamento relativo entre os materiais, as deformações médias são iguais para o aço e para concreto.
- 2 - As seções transversais permanecem planas após a deformação conforme a hipótese de Bernoulli.

No interesse de simplificar a formulação, a área de concreto ocupada pela armadura não é reduzida e a influência do tipo de agregado no módulo de elasticidade não é considerada.

3. Relações constitutivas

As tensões e as deformações de compressão assumem valores negativos.

A relação constitutiva do aço é definida por

$$\sigma_s = \sigma_s(\varepsilon_s) \quad (1)$$

onde a tensão na armadura σ_s é função da deformação axial ε_s . A tensão de escoamento e o módulo de elasticidade do aço são f_y e E_s , respectivamente. A deformação associada ao escoamento do aço ε_{sy} corresponde a

$$\varepsilon_{sy} = \frac{f_y}{E_s} \quad (2)$$

A curva do aço é dividida em 3 zonas (Figura 1).

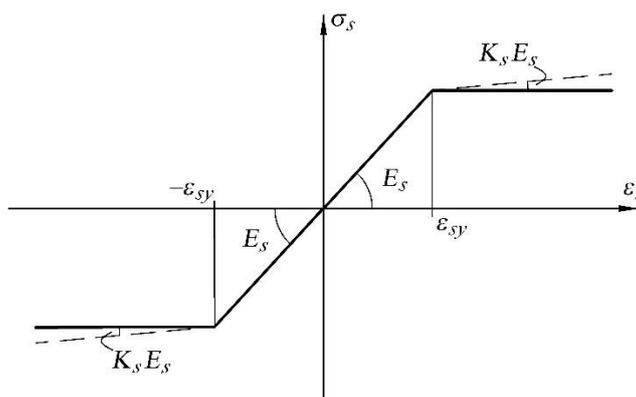


Figura 1 – Relação tensão-deformação do aço.

A tensão no concreto σ_c é função da deformação no concreto ε_c , i. e.

$$\sigma_c = \sigma_c(\varepsilon_c) \quad (3)$$

Os parâmetros que definem a curva de Sargin apresentada no CEB-FIP Model Code 1990 [9] são a tensão de compressão mínima σ_{c1} , a deformação crítica ε_{c1} e o módulo de elasticidade inicial E_{c0} (Figura 2).

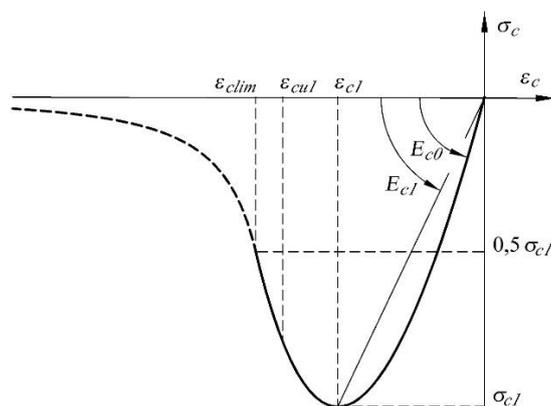


Fig. 2 – Relação tensão-deformação do concreto

A tensão no concreto é determinada por meio de

$$\begin{aligned} \sigma_c &= \sigma_{c1} \frac{1}{b\eta^2 + c\eta} & \text{para } \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c \text{ lim}} \\ \sigma_c &= \sigma_{c1} \frac{k_1\eta - \eta^2}{(k_1 - 2)\eta + 1} & \text{para } \varepsilon_{c \text{ lim}} \leq \varepsilon_c \leq 0 \\ \sigma_c &= 0 & \text{para } 0 \leq \varepsilon_c \end{aligned} \quad (4)$$

onde $\varepsilon_{c \text{ lim}}$ é a deformação que divide os dois primeiros trechos da curva. O módulo de elasticidade secante E_{c1} no ponto crítico é definido por



XII CONGRESSO BRASILEIRO
de PONTES e ESTRUTURAS
7 a 11 de junho de 2021 - Congresso Virtual

$$E_{c1} = \frac{\sigma_{c1}}{\varepsilon_{c1}} \quad (5)$$

O módulo de elasticidade tangente do concreto $E_c(\varepsilon_c)$ é estabelecido pela derivada

$$E_c(\varepsilon_c) = \frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon_c} \quad (6)$$

As expressões e fornecem

$$\begin{aligned} E_c(\varepsilon_c) &= E_{c1} \frac{(c+2b\eta)}{(b\eta^2+c\eta)^2} & \text{para } \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c \text{ lim}} \\ E_c(\varepsilon_c) &= E_{c1} \frac{[\eta^2(2-k_1)+k_1-2\eta]}{[(k_1-2)\eta+1]^2} & \text{para } \varepsilon_{c \text{ lim}} \leq \varepsilon_c \leq 0 \\ E_c(\varepsilon_c) &= 0 & \text{para } 0 \leq \varepsilon_c \end{aligned} \quad (7)$$

O coeficiente k_1 , a variável η , a deformação limite $\varepsilon_{c \text{ lim}}$ da equação (7) são detalhadamente apresentados em Kabenjabu [10]. A deformação associada à tensão crítica e o valor de cálculo do módulo de elasticidade na origem são respectivamente estimados de acordo com as disposições do item 5.8.6 do CEN Eurocode 2:2004 [5] são também consideradas. Os coeficientes de minoração das resistências do concreto e do aço adotados são $\gamma_c = 1,4$ e $\gamma_s = 1,15$, respectivamente, conforme recomendado pela ABNT NBR 6118:2014 [7]. A redução da resistência do concreto devida aos efeitos de carga de longa duração (Rüsch [11]) é considerada por meio do coeficiente $\alpha_c = 0,85$ na expressão

$$\sigma_{c1} = -\alpha_c f_{ck} / \gamma_c \quad (8)$$

4. Equações de compatibilidade e equilíbrio

A equação de compatibilidade pode ser escrita da forma

$$\varepsilon = \mathbf{p}^T \mathbf{k} \quad (9)$$

onde $\mathbf{p} = [1 \quad y \quad z]^T$ é o vetor de posição e $\mathbf{k} = [k_x \quad k_y \quad k_z]^T$ é o vetor das deformações generalizadas. O parâmetro k_x é a deformação na origem. Os parâmetros k_y e k_z correspondem às curvaturas, com sinais invertidos.

As equações de equilíbrio podem ser definidas na forma matricial

$$\mathbf{S} = \int_A \mathbf{p} \sigma(\varepsilon) dA \quad (10)$$

onde $\sigma(\varepsilon)$ é a tensão em um ponto e $\mathbf{S} = [N_x \quad M_y \quad M_z]^T$ é o vetor dos esforços solicitantes. A seguinte equação incremental é obtida a partir de (10):

$$\Delta \mathbf{S} = \int_A \mathbf{p} \Delta \sigma(\varepsilon) dA = \int_A \mathbf{p} E(\varepsilon) \Delta \varepsilon dA \quad (11)$$

$E(\varepsilon)$ é o modulo de elasticidade tangente do material em um ponto. A substituição de em fornece

$$\Delta \mathbf{S} = \mathbf{E} \Delta \mathbf{k} \quad (12)$$

onde a matriz tangente \mathbf{E} é expressa por

$$\mathbf{E} = \int_A \mathbf{p} E(\varepsilon) \mathbf{p}^T dA \quad (13)$$

5. Métodos numéricos de verificação e dimensionamento

A Figura 3 apresenta o processo do arco-cilíndrico, também conhecido como método do comprimento de arco, é uma variante do método de Newton-Raphson que limita o avanço do processo iterativo por meio de um comprimento de arco l e de um fator de carga λ . Desta forma, é possível ultrapassar máximos e mínimos locais. Os métodos de verificação e dimensionamento apresentados não são restritos à curva de Sargin e podem ser utilizados com outras relações constitutivas.

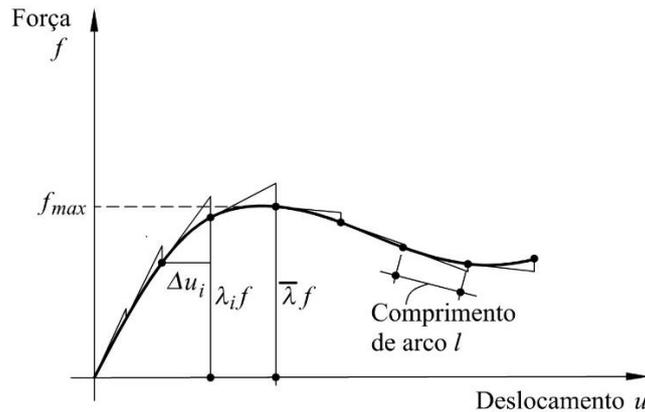


Fig. 3 – Processo do arco cilíndrico

5.1. Processo do arco-cilíndrico

O processo do arco cilíndrico apresentado por Crisfield [12] é uma formulação alternativa do método originalmente proposto por Riks [13].

A solicitação atuante na seção é definida por $\lambda \bar{\mathbf{S}}$, onde o fator λ é um fator de proporcionalidade e $\bar{\mathbf{S}} = [\bar{N}_x \quad \bar{M}_y \quad \bar{M}_z]$ é uma solicitação de referência.

O termo $\Delta \mathbf{S}_i$ é definido por

$$\Delta \mathbf{S}_i = \lambda \bar{\mathbf{S}} - \mathbf{S}_i \quad (14)$$

onde $\mathbf{S}_i = [N_{x,i} \quad M_{y,i} \quad M_{z,i}]$ é o vetor das solicitações resistentes associadas ao vetor das deformações generalizadas $\mathbf{k}_i = [k_{x,i} \quad k_{y,i} \quad k_{z,i}]^T$ na iteração i .

A equação é reescrita na forma

$$\Delta \mathbf{k}_i = \mathbf{E}_i^{-1} \Delta \mathbf{S}_i \quad (15)$$

onde \mathbf{E}_i é a matriz tangente e $\Delta \mathbf{k}_i$ é o incremento do vetor das deformações generalizadas na iteração i .

Utilizando (14) e (15), obtém-se

$$\Delta \mathbf{k}_i = \lambda \mathbf{E}_i^{-1} \bar{\mathbf{S}} - \mathbf{E}_i^{-1} \mathbf{S}_i = \lambda \bar{\mathbf{g}}_i - \mathbf{g}_i \quad (16)$$

onde

$$\bar{\mathbf{g}}_i = \mathbf{E}_i^{-1} \bar{\mathbf{S}} \quad (17)$$

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{E}_i^{-1} \mathbf{S}_i$$

No processo do arco-cilíndrico, o comprimento do arco l é definido pela expressão

$$l^2 = \Delta \mathbf{k}_i^T \Delta \mathbf{k}_i \quad (18)$$

A substituição de (18) em (16) fornece

$$l^2 = (\lambda \bar{\mathbf{g}}_i^T - \mathbf{g}_i^T)(\lambda \bar{\mathbf{g}}_i - \mathbf{g}_i) = \lambda^2 \bar{\mathbf{g}}_i^T \bar{\mathbf{g}}_i - 2\lambda \bar{\mathbf{g}}_i^T \mathbf{g}_i + \mathbf{g}_i^T \mathbf{g}_i \quad (19)$$

A expressão define a equação do segundo grau

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (20)$$

onde

$$a = \bar{\mathbf{g}}_i^T \bar{\mathbf{g}}_i \quad ; \quad b = -2\bar{\mathbf{g}}_i^T \mathbf{g}_i \quad ; \quad c = \mathbf{g}_i^T \mathbf{g}_i - l^2 \quad (21)$$

Uma das raízes da equação (20) corresponde ao fator λ da próxima iteração. A escolha da raiz a ser adotada é discutida em Kabenjabu [10].

5.2. Dimensionamento da seção transversal

Os parâmetros necessários para o dimensionamento da seção transversal são as propriedades físicas dos materiais, as características geométricas da seção transversal, a posição e a área relativa de cada armadura, as taxas de armadura mínima e máxima, e o comprimento do arco-cilíndrico l . A solicitação de dimensionamento é definida por $\lambda_d \bar{\mathbf{S}}$, onde λ_d é um fator de proporcionalidade e $\bar{\mathbf{S}}$ é uma solicitação de referência.

O processo numérico é dividido nas seguintes etapas:

I. Verificação para a armadura mínima

O fator de carga máximo $\bar{\lambda}_{A_s \min}$ associado à armadura mínima $A_{s \min}$ é obtido por meio do processo descrito em Kabenjabu [10]. Se $\lambda_d \leq \bar{\lambda}_{A_s \min}$, a solução do problema é $A_{s \min}$ e o processo é encerrado. Em caso contrário, define-se $\lambda_{INF} = \bar{\lambda}_{A_s \min}$ e $A_{s \text{ INF}} = A_{s \min}$.

II. Verificação para a armadura máxima

Determina-se o fator de carga máximo $\bar{\lambda}_{A_s \max}$ associado à armadura máxima $A_{s \max}$. Se $\lambda_d > \bar{\lambda}_{A_s \max}$, a seção não é suficiente e o processo é encerrado. Em caso contrário, define-se $\lambda_{SUP} = \bar{\lambda}_{A_s \max}$ e $A_{s \text{ SUP}} = A_{s \max}$.

III. Processo iterativo

A armadura necessária é estimada por meio da interpolação linear

$$A_s = A_{s \text{ INF}} + (A_{s \text{ SUP}} - A_{s \text{ INF}}) \frac{\lambda_d - \lambda_{INF}}{\lambda_{SUP} - \lambda_{INF}} \quad (22)$$

Determina-se o fator de carga máximo $\bar{\lambda}$ para a armadura A_s . Se $\bar{\lambda} > \lambda_d$, $\lambda_{SUP} = \bar{\lambda}$ e $A_{s \text{ SUP}} = A_s$. Em caso contrário, faz-se $\lambda_{INF} = \bar{\lambda}$ e $A_{s \text{ INF}} = A_s$.

Inicia-se uma nova iteração enquanto $A_{s \text{ SUP}} - A_{s \text{ INF}} > TOL_d$, onde TOL_d é a tolerância do processo de dimensionamento ($TOL_d = 1 \times 10^{-7} \text{ m}^2$). Quando a tolerância é satisfeita, o processo é encerrado, adotando $A_{s \text{ SUP}}$ como resultado, a favor da segurança.

6. Exemplos e resultados

Os resultados dos exemplos são apresentados nas Tabelas 1, onde $A_{s \text{ tot}}$ é a armadura total necessária, $\varepsilon_{c \min}$ é a deformação mínima do concreto e $\varepsilon_{s \max}$ é a deformação máxima das armaduras. A diferença relativa $\Delta A_{s \text{ tot}}/A_{s \text{ tot}}$ é definida por

$$\Delta A_{s \text{ tot}}/A_{s \text{ tot}} = (A_{s \text{ tot}, SARGIN} - A_{s \text{ tot}, PAR-RET})/A_{s \text{ tot}, PAR-RET} \quad (23)$$



XII CONGRESSO BRASILEIRO
de PONTES e ESTRUTURAS
7 a 11 de junho de 2021 - Congresso Virtual

onde $A_{s\ tot, PAR-RET}$ e $A_{s\ tot, SARGIN}$ são as armaduras totais necessárias obtidas com o diagrama parábola-retângulo e a curva de Sargin, respectivamente.

Esta Tabela investiga o dimensionamento da seção típica de 25 x 80 cm, sem armadura de compressão, submetida a flexão simples. O valor característico da resistência ao escoamento do aço é $f_{yk} = 500\text{MPa}$ e a resistência característica de concreto à compressão é $f_{ck} = 30\text{MPa}$.

Tab. 1 - Seção sem armadura de compressão submetida a flexão simples

Esforços solicitantes			Diagrama parábola-retângulo			Curva de Sargin			Dif.	Diferença relativa
N_x	M_y	M_z	$A_{s\ tot}$	$\varepsilon_{c\ min}$	$\varepsilon_{s\ max}$	$A_{s\ tot}$	$\varepsilon_{c\ min}$	$\varepsilon_{s\ max}$	$\Delta A_{s\ tot}$	$\Delta A_{s\ tot} / A_{s\ tot}$
(kN)	(kNm)	(kNm)	(cm ²)			(cm ²)			(cm ²)	
0	0	150	4,8	-0,00126	0,01001	4,8	-0,00113	0,01000	0,0	-0,2%
0	0	300	9,9	-0,00212	0,01000	9,9	-0,00199	0,01000	0,0	0,0%
0	0	450	15,3	-0,00317	0,01000	15,4	-0,00286	0,00920	0,0	0,2%
C30	0	600	21,4	-0,00350	0,00710	21,5	-0,00286	0,00568	0,1	0,4%
0	0	750	28,2	-0,00350	0,00449	28,4	-0,00291	0,00366	0,2	0,6%
0	0	900	36,1	-0,00350	0,00271	36,4	-0,00281	0,00207	0,3	0,8%
0	0	1050	70,5	-0,00350	0,00135	74,6	-0,00350	0,00131	4,0	5,7%

Esta análise tem especial interesse do ponto de vista numérico, pois demonstra a boa convergência do processo do arco cilíndrico mesmo sem nenhuma contribuição do módulo de elasticidade da armadura de compressão. As diferenças relativas apresentam resultados inferiores a 1% nos primeiros exemplos, quando a armadura de tração atinge o escoamento ($\varepsilon_{s\ max} \geq 0,00207$). A diferença relativa do último exemplo é 5,7%, onde a armadura não atinge o escoamento. A ABNT NBR 6118:2014 [7] recomenda evitar, nas vigas, as posições de linha neutra no domínio 4 por meio de uma armadura de compressão. Mais casos de verificação e de dimensionamento são apresentados por Kabenjabu e Schulz [14]. Os casos apresentados consideraram diferentes classes de resistência do concreto. São analisados também vários casos de dimensionamento à flexão composta e à compressão simples.

7. Conclusões

O dimensionamento de seções de concreto com o diagrama parábola-retângulo é um modelo prático e consagrado. No entanto, o módulo de elasticidade na origem e o patamar de escoamento do diagrama parábola-retângulo não representam o comportamento do concreto. A análise limite e global de estruturas de concreto que consideram o seu comportamento físico e geométrico não linear requer relações de tensão-deformação que representam melhor as suas propriedades. A curva Sargin é uma opção nesta pesquisa, pois é uma função do ponto de pico e do módulo de elasticidade na origem e representa ramo descendente da relação tensão-deformação.

Esta pesquisa propõe um procedimento numérico para o dimensionamento de seções de concreto que utiliza um método de comprimento de arco-cilíndrico e promove boa convergência no ramo descendente da curva Sargin, sem ter que considerar as distribuições de limites de tensão em torno do pivô C no domínio 5. Os limites das deformações para o concreto e o aço não são necessários, mas são incluídos para evitar deformações excessivas. O método de dimensionamento proposto é eficiente e numericamente robusto, e se aplica a outras relações de tensão-deformação com ou sem ramo descendente. A validação de um único modelo de cálculo para as análises limite e global de seções de concreto motiva futuras investigações.



XII CONGRESSO BRASILEIRO
de PONTES e ESTRUTURAS
7 a 11 de junho de 2021 - Congresso Virtual

Referências

- [1] MÖRSCH, E. Concrete-steel construction (Der Eisenbetonbau), The Engineering News Publishing Company, New York, 1910, 368 p.
- [2] MATTOCK, A. H., KRIZ, L. B., AND HOGNESTAD, E. Rectangular concrete stress distribution in ultimate strength design, ACI Journal, 1961, v. 57, n. 2, p. 875-928.
- [3] RÜSCH, H., GRASSER, E., AND RAO, P. S. Principes de calcul du béton armé sous états de contraintes monoaxiaux, Bul. d'Information n. 36, CEB, Paris, 1962, p. 1-112.
- [4] AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. Building code requirements for structural concrete - ACI 318-14, Farmington Hills, 2015.
- [5] COMITÉ EUROPÉEN DE NORMALISATION. Eurocode 2: Design of concrete structures Part 1-1: General rules and rules for buildings - EN 1992-1-1, Brussels, 2004.
- [6] FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON. FIB Model Code for Concrete Structures 2010, Ernst & Sohn, Berlin, 2013, 402 p.
- [7] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Projeto de estruturas de concreto –Procedimento – ABNT NBR 6118, Rio de Janeiro, 2014.
- [8] SARGIN, M. Stress-strain relationships for concrete and the analysis of structural concrete sections, SM Study n. 4, University of Waterloo, Canada, 1971, 167 p.
- [9] COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON, FÉD. INTERNATIONALE DE LA PRÉCONTRAÎNTE. CEB-FIP Model Code 1990, Telford, London, 1993, 437 p.
- [10] KABENJABU, J. N. Dimensionamento de seções de concreto considerando a curva de Sargin, Niterói, 2017, Dissertação (mestrado) – Pós-Civil, UFF, 196 p.
- [11] RÜSCH, H. Researches toward a general flexural theory of structural concrete. ACI Journal, v. 57, n. 7, 1960, p. 1-28.
- [12] CRISFIELD, M. A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through”, Computers & Structures, 1981, v. 13, n. 1-3, p. 55-62.
- [13] RIKS, E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems, International Journal of Solids Structures, 1979, v. 15, n. 7, p. 529-551.
- [14] KABENJABU, J. N. & SCHULZ, M. Reinforcement design of concrete sections based on the arc-length method. Rev. IBRACON Estrut. Mater. vol.11 no.6 São Paulo Nov./Dec. 2018