



XIV Congresso Brasileiro
de Pontes e Estruturas

Dimensionamento de seções de concreto armado submetidos a flexão composta normal

**Leandro Mouta Trautwein¹, Luiz Carlos de Almeida², Marcos Alves da Silva³,
Rafael Andrés Sanabria Díaz⁴**

¹ Prof. Doutor do Departamento de Estruturas da Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Universidade Estadual de Campinas/ leandromt@fec.unicamp.br

² Prof. Doutor do Departamento de Estruturas da Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Universidade Estadual de Campinas / almeida@fec.unicamp.br

³ Doutorando do Departamento de Estruturas da Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Universidade Estadual de Campinas / marcosasilva@live.com

⁴ Doutorando do Departamento de Estruturas da Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Universidade Estadual de Campinas / rafael_sanabria25@hotmail.com

Resumo

O estudo das seções de concreto armado tem por finalidade verificar se sob a ação das solicitações de cálculo a peça não supere cada um dos estados limites. Fatores parciais de segurança são aplicados para que concreto e aço tenham a resistência minorada e as ações seus valores majorados. Para os casos de uma seção submetida a flexão composta normal reta originada pela combinação de força normal (tração ou compressão) e momento fletor, de modo geral, não existe uma solução analítica deste problema, de forma que o cálculo das armaduras deve ser realizado iterativamente. As iterações são necessárias para encontrar a profundidade x da linha neutra que respeite simultaneamente as equações de equilíbrio e o número de iterações dependerá do tamanho do intervalo utilizado para encontrar o valor de x . Portanto, para reduzir este intervalo, divide-se o problema em zonas de dimensionamento (grandes e pequenas excentricidades). O objetivo deste trabalho é apresentar uma alternativa atualizada de Gilson B Fernandes (2006), para dimensionamento de peças de concreto armado submetidas a flexão composta normal reta de maneira gráfica, para as duas classes de concreto (1 e 2), respeitando simultaneamente as equações de equilíbrio.

Palavras-chave

Flexão composta normal reta; concreto armado; dimensionamento.

Introdução

A flexão composta, pode ser subdivida em flexão composta normal reta e flexão composta oblíqua. Este tipo de esforço ocorre quando a resultante das tensões normais pode ser decomposta em uma força normal e momentos fletores. A flexão composta normal reta é caracterizada por apresentar apenas uma resultante de momento na seção transversal. Os momentos fletores podem decorrer da excentricidade da força normal, com relação ao eixo do elemento, desde que a carga se concentre em um dos eixos principais de inércia da seção transversal. A linha neutra na flexão composta normal é sempre perpendicular ao plano de ação do momento fletor. Já a flexão composta oblíqua é caracterizada por apresentar resultantes de momento em torno dos dois eixos de simetria da seção transversal. Neste caso a linha neutra não é perpendicular a nenhum dos planos de ação dos momentos fletores.

O método de cálculo das armaduras mais conhecido para uma seção de concreto armado submetida a flexão composta normal é o iterativo, onde as iterações são necessárias para encontrar a profundidade x da linha neutra que respeite simultaneamente as equações de equilíbrio e o número de iterações

dependerá do tamanho do intervalo $(-\infty; +\infty)$ utilizado para encontrar o valor de x . Portanto, para reduzir este intervalo, divide-se o problema em zonas de dimensionamento (grandes e pequenas excentricidades). Desta forma, o objetivo deste trabalho é apresentar uma alternativa atualizada de Gilson B Fernandes (2006), para dimensionamento de peças de concreto armado submetidas a flexão composta normal de maneira gráfica, para as duas classes de concreto (1 e 2), respeitando simultaneamente as equações de equilíbrio.

Lista das variáveis

A Figura 1 ilustra uma seção de concreto armado submetido a flexão composta normal. Para uma melhor compreensão das expressões que serão desenvolvidas ao longo do artigo as variáveis serão descritas a seguir:

- A_s área da seção transversal da armadura mais tracionada ou menos comprimida;
- A'_s área da seção transversal da armadura mais comprimida ou menos tracionada;
- b_w largura da seção;
- d altura útil;
- d' distância do centro de gravidade da armadura até a borda da seção mais próxima;
- f_{ck} resistência característica à compressão do concreto;
- f_{cd} resistência de cálculo à compressão do concreto;
- h altura total da seção;
- M_u Momento fletor atuante na seção transversal de uma peça de concreto armado;
- N_u Força normal atuante na seção transversal de uma peça de concreto armado;
- R_c força de resultante compressão atuando no centro de gravidade da área de concreto comprimido;
- R_s força de resultante atuando no centro de gravidade das armaduras tracionadas;
- R'_s força de resultante atuando no centro de gravidade das armaduras comprimidas;
- x posição da linha neutra a partir da borda mais comprimida ou menos tracionada;
- z_c distância da resultante de compressão ao centro de gravidade das armaduras tracionadas, utilizada no cálculo do momento fletor resistente;
- α_c parâmetro de redução da resistência do concreto na compressão;
- β_x medida adimensional da posição da linha neutra, representa a razão x/d ;
- λ coeficiente redutor da altura da linha neutra para o diagrama de tensão retangular equivalente, de acordo com o item 17.2.2 da ABNT NBR6118 (2014);
- ϵ_{cu} deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura;
- ϵ_{c2} deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico;
- ϵ_c deformação específica de encurtamento do concreto;
- ϵ_s e ϵ'_s deformação específica de alongamento do aço tracionado e comprimido respectivamente;
- ξ distância medida a partir da linha neutra em direção à borda mais comprimido da seção transversal, utilizado como variável nas integrações;

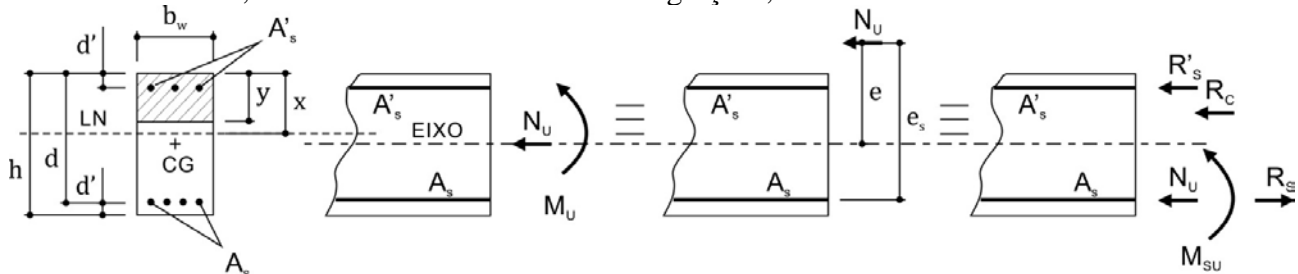


Figura 1 – Seção de concreto armado submetido à flexão composta.

Os esforços solicitantes são referidos, convencionalmente, ao eixo geométrico da peça, convencionando para tração $N_u > 0$ e para compressão $N_u < 0$. Com o intuito de generalizar a utilização da posição da linha neutra, independentemente da altura h da viga, utiliza-se a notação β_x tornando-se, assim, uma variável adimensional. Relaciona-se também a relação d' e d na notação η .

$$\beta_x = \frac{x}{d}; \quad \eta = \frac{d'}{d} \quad (1)$$

Estado limite último para as solicitações normais em uma seção retangular

A partir das hipóteses básicas de cálculo no estado limite último para as solicitações normais, pode se estabelecer um esquema que representa a distribuição das deformações na seção transversal quando um dos materiais (aço ou concreto) atinge o estado limite último (Figura 2).

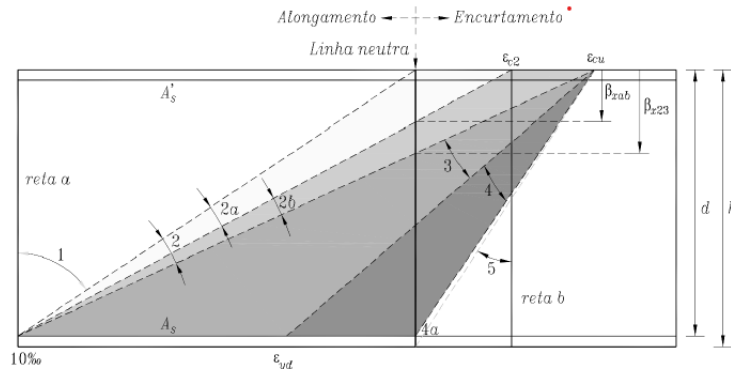
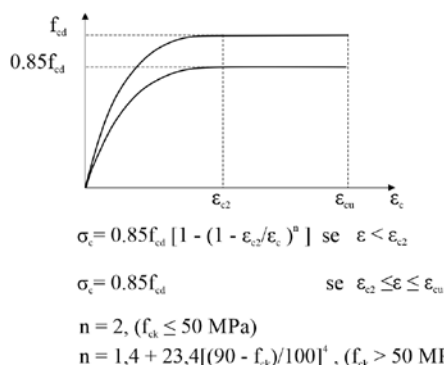


Figura 2 - Domínios de deformação do estado limite último de uma seção transversal (ABNT NBR 6118: 2014).

Para realizar o dimensionamento ou verificação de uma seção de concreto armado à flexão composta normal deve-se percorrer todos os domínios de deformações específicas no estado limite último: tração uniforme, flexão composta com tração, flexão simples, flexão composta com compressão e compressão uniforme. Durante este desenvolvimento, a notação β_x (x/d) assume os valores:

Domínio 1:	de $-\infty$ a 0
Domínio 2:	de 0 a $\frac{\epsilon_{c,u}}{\epsilon_{c,u} + \epsilon_{s,u}}$
Domínios 3 e 4:	de $\frac{\epsilon_{c,u}}{\epsilon_{c,u} + \epsilon_{s,u}}$ a $\frac{\epsilon_{c,u}}{\epsilon_{c,u} + \epsilon_{y,d}}$
Domínio 4a:	de l a $l + \eta$
Domínio 5:	de $l + \eta$ a $+\infty$

De acordo com o item 8.2.10.1 da ABNT NBR6118:2014, a Figura 3 apresenta o diagrama do comportamento do concreto à compressão, bem como a expressão para a determinação da tensão no concreto comprimido em função das deformações específica (ϵ_c), variando de zero a ϵ_{cu} .



- para concretos de classes até C50:

$$\epsilon_{c2} = 2,0\text{‰};$$

$$\epsilon_{cu} = 3,5\text{‰}$$

- para concretos de classes de C50 até C90:

$$\epsilon_{c2} = 2,0\text{‰} + 0,085\text{‰} \cdot (f_{ck} - 50)^{0,53};$$

$$\epsilon_{cu} = 2,6\text{‰} + 35\text{‰} \cdot [(90 - f_{ck})/100]^4$$

$$\sigma_c = 0,85f_{cd} [1 - (1 - \epsilon_{c2}/\epsilon_c)^n] \text{ se } \epsilon < \epsilon_{c2}$$

$$\sigma_c = 0,85f_{cd} \text{ se } \epsilon_{c2} \leq \epsilon \leq \epsilon_{cu}$$

$$n = 2, (f_{ck} \leq 50 \text{ MPa})$$

$$n = 1,4 + 23,4[(90 - f_{ck})/100]^4, (f_{ck} > 50 \text{ MPa})$$

Figura 3 – Diagrama tensão-deformação no concreto (ABNT NBR 6118, 2014).

Na Figura 4 estão apresentadas as hipóteses de simplificação do diagrama parábola retângulo de tensão no concreto para o diagrama retangular, de acordo com o item 17.2.2 – hipóteses básicas da ABNT NBR6118 (2014).

$$\lambda = 0,8, f_{ck} \leq 50MPa$$

$$\lambda = 0,8 - \frac{(f_{ck}-50)}{400}, f_{ck} > 50MPa$$

$$\alpha_c = 0,85, f_{ck} \leq 50MPa$$

$$\alpha_c = 0,85 \left[1,0 - \frac{(f_{ck}-50)}{200} \right], f_{ck} > 50MPa$$

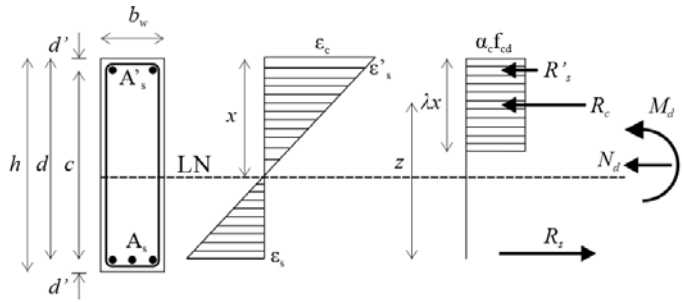


Figura 4 – Retangularização do diagrama de tensões de compressão no concreto (ABNT NBR 6118, 2014).

Equações de Equilíbrio

A Tabela 1 apresenta as equações de equilíbrio de peças submetidas à força normal de compressão, com os casos que abrangem os domínios de deformações (2, 3, 4, 4a e 5). É considerada uma seção retangular com armaduras distribuídas em duas faces opostas A_s e A'_s (Figura 1).

Tabela 1 – Equações de equilíbrio de peças submetidas à força normal de compressão.

Domínio	Equações de Equilíbrio	Sistema de Equações
2 ($0 < \beta_x \leq \eta$)	$N_u = R_c - R'_s - R_s$ $N_u e_s = R_c z_c - R'_s (d - d')$	$\begin{cases} N_d = b_w d \beta_x \lambda (\alpha_c f_{cd}) - A'_s \sigma'_s - A_s \sigma_s \\ N_d e_s = b_w d^2 \beta_x \lambda (\alpha_c f_{cd}) \left(1 - \frac{\lambda}{2} \beta_x\right) - A'_s \sigma'_s (d - d') \end{cases}$
2, 3 e 4 ($\eta \leq \beta_x \leq 1$)	$N_u = R_c + R'_s - R_s$ $N_u e_s = R_c z_c + R'_s (d - d')$	$\begin{cases} N_d = b_w d \beta_x \lambda (\alpha_c f_{cd}) + A'_s \sigma'_s - A_s \sigma_s \\ N_d e_s = b_w d^2 \beta_x \lambda (\alpha_c f_{cd}) \left(1 - \frac{\lambda}{2} \beta_x\right) + A'_s \sigma'_s (d - d') \end{cases}$
4 ^a ($1 < \beta_x \leq 1 + \eta$)	$N_u = R_c + R'_s + R_s$ $N_u e_s = R_c z_c + R'_s (d - d')$	$\begin{cases} N_d = b_w d \lambda \beta_x (\alpha_c f_{cd}) + A'_s \sigma'_s + A_s \sigma_s \\ N_d e_s = b_w d^2 \lambda \beta_x (\alpha_c f_{cd}) (1 - 0,5 \lambda \beta_x) + A'_s \sigma'_s (d - d') \end{cases}$
5 $1 + \eta < \beta_x < +\infty$	$N_u = R_c + R'_s + R_s$ $N_u e_s = R_c z_c + R'_s (d + d')$	$\begin{cases} N_d = b_w d \lambda \beta_x (\alpha_c f_{cd}) + A'_s \sigma'_s + A_s \sigma_s \\ N_d e_s = b_w d^2 \lambda \beta_x (\alpha_c f_{cd}) (1 - 0,5 \lambda \beta_x) + A'_s \sigma'_s (d - d') \end{cases}$
	1º caso: $\lambda \cdot x < h$ $1 + \eta \leq \beta_x \leq \frac{1}{\lambda} (1 + \eta)$	$\begin{cases} N_d = b_w h (\alpha_c f_{cd}) + A'_s \sigma'_s + A_s \sigma_s \\ N_d e_s = b_w h (\alpha_c f_{cd}) (d - 0,5 h) + A'_s \sigma'_s (d - d') \end{cases}$
	2º caso: $\lambda \cdot x = h = cte$ $\frac{1}{\lambda} (1 + \eta) \leq \beta_x < +\infty$	$\begin{cases} N_d = b_w h (\alpha_c f_{cd}) + A'_s \sigma'_s + A_s \sigma_s \\ N_d e_s = b_w h (\alpha_c f_{cd}) (d - 0,5 h) + A'_s \sigma'_s (d - d') \end{cases}$

Com intuito de facilitar as análises e discussões neste trabalho, divide-se a 1ª equação de equilíbrio (de forças) por $b_w d f_{cd}$ e a 2ª equação de equilíbrio (de momento) por $b_w d^2 f_{cd}$ de cada um dos sistemas de equações mostrados na Tabela 1, transformando-as em equações de equilíbrio na forma adimensional. As equações de equilíbrio dos domínios 2, 3 e 4 são reescritas a seguir:

$$\frac{N_d}{b_w d f_{cd}} = \lambda \alpha_c \beta_x + \frac{A'_s \sigma'_s}{b_w d f_{cd}} - \frac{A_s \sigma_s}{b_w d f_{cd}} \quad (3)$$

$$\frac{N_d e_s}{b_w d^2 f_{cd}} = \lambda \alpha_c \beta_x \left(1 - \frac{\lambda}{2} \beta_x\right) + \frac{A'_s \sigma'_s (d - d')}{b_w d f_{cd} d} \quad (4)$$

Para generalizar o uso das equações, devido ao grande número de variáveis, são adotados os seguintes termos:

$$\mu = \lambda \alpha_c \beta_x \left(1 - \frac{\lambda}{2} \beta_x\right); \quad \omega = \lambda \alpha_c \beta_x \quad (5)$$

$$\frac{(d - d')}{d} = 1 - \eta \quad (6)$$

Força normal e momento reduzidos:

$$v_d = \frac{N_d}{b_w d f_{cd}}; \quad \mu_{sd} = \frac{N_d e_s}{b_w d^2 f_{cd}} \quad (7)$$

Taxa de armadura mecânica referente a A_s e A'_s :

$$\omega_d \frac{\sigma_s}{f_{yd}} = \frac{A_s \sigma_s}{b_w d f_{cd}}; \quad \omega'_d \frac{\sigma'_s}{f_{ycd}} = \frac{A'_s \sigma'_s}{b_w d f_{cd}} \quad (8)$$

Substituindo as novas variáveis nas Equações 3 e 4, chega-se à forma adimensional do sistema de equações de equilíbrio e generalizando para os domínios 2, 3, 4, 4a e 5 (1º e 2º casos), tem-se:

$$v_d = \omega \pm \omega'_d \frac{\sigma'_s}{f_{ycd}} \mp \omega_d \frac{\sigma_s}{f_{yd}} \rightarrow 1^{\text{a}} \text{ eq. de equilíbrio} \quad (9)$$

$$\mu_{sd} = \mu \pm \omega'_d \frac{\sigma'_s}{f_{ycd}} (1 - \eta) \rightarrow 2^{\text{a}} \text{ eq. de equilíbrio} \quad (10)$$

Os sinais adotados em cada um dos termos das Equações 9 e 10 depende do domínio analisado pode ser conferido a partir da Tabela 1. A seguir é proposto um método gráfico para resolver o sistema de equações mencionado. O método tem como objetivo encontrar os intervalos de valores de β_x que satisfazem cada uma das equações de equilíbrio isoladamente. A partir da interseção desses intervalos são encontrados os valores de β_x que satisfazem ambas as equações de equilíbrio e que podem ser adotados no dimensionamento da seção transversal do elemento estrutural.

Interação entre o momento fletor e força normal de compressão

Nesta seção será descrita uma rotina de dimensionamento de peças de concreto armado submetidas a flexão composta normal de maneira gráfica. A partir da análise da 2º equação de equilíbrio (Equação 10) pode-se afirmar que:

$$\mu_{sd} = \mu \pm \omega'_d \frac{\sigma'_s}{f_{ycd}} (1 - \eta) \rightarrow \text{para o caso de armadura dupla}; \quad (11)$$

$$\mu_{sd} = \mu \rightarrow \text{para o caso de armadura simples}. \quad (12)$$

Desta forma pode-se construir um gráfico de $\mu \times \beta_x$, como os das Figuras 5 e 6. A Tabela 3 apresenta a definição dos pontos obtidos no gráfico (A, B, C e D). Para uma dada seção transversal retangular conhecida, destaca-se que a curva do gráfico $\mu \times \beta_x$ representa a variação da parcela de momento reduzido adimensional resistente (μ) do concreto comprimido com a posição da linha neutra β_x .

Tabela 2 – Pontos do gráfico $\mu \times \beta_x$.

Ponto A: $(\beta_x, \mu) = (\beta_{x,A}, \mu_A)$	$\beta_x = \beta_{x,A} = \eta$ Transição de A'_s tracionada para A'_s comprimida	$\mu_A = \lambda \alpha_c \beta_{x,A} \left(1 - \frac{\lambda}{2} \beta_{x,A}\right)$	$(\beta_{x,A}, \mu_A) = \left(\eta, \lambda \alpha_c \eta \left(1 - \frac{\lambda \eta}{2}\right)\right)$
Ponto B: $(\beta_x, \mu) = (\beta_{x,B}, \mu_B)$	$\beta_x = \beta_{x,B} = 1$ Transição do domínio 4 (A_s tracionada) para domínio 4a (A_s comprimido)	$\mu_B = \lambda \alpha_c \beta_{x,B} \left(1 - \frac{\lambda}{2} \beta_{x,B}\right)$	$(\beta_{x,B}, \mu_B) = \left(1, \lambda \alpha_c \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)\right)$
Ponto C: $(\beta_x, \mu) = (\beta_{x,C}, \mu_C)$	$1 < \beta_{x,c} \leq \frac{(1 + \eta)}{\lambda}$	$\mu = \lambda \alpha_c \beta_x \left(1 - \frac{\lambda}{2} \beta_x\right)$ $\Rightarrow \frac{d\mu}{d\beta_x} = \lambda \alpha_c - \lambda^2 \alpha_c \beta_x$	$(\beta_{x,C}, \mu_C) = \left(\frac{1}{\lambda}, \frac{\alpha_c}{2}\right)$
Ponto de máximo da curva $\mu \times \beta_x$		No ponto de máximo: $\frac{d\mu}{d\beta_x} = 0; \rightarrow \beta_{x,c} = \frac{1}{\lambda}$	
Ponto D:	$\beta_{x,D} = \frac{(1 + \eta)}{\lambda}$	$\mu_D = \frac{\alpha_c}{2} (1 - \eta^2)$	$(\beta_{x,D}, \mu_D) = \left(\frac{(1 + \eta)}{\lambda}, \frac{\alpha_c}{2} (1 - \eta^2)\right)$ Termo constante, para $\beta_x > \frac{(1 + \eta)}{\lambda}$
Trecho constante	$\frac{(1 + \eta)}{\lambda} < \beta_x < -\infty$	$\mu = \text{constante}$	$\mu = \frac{\alpha_c}{2} (1 - \eta^2)$

Como o momento solicitante reduzido (μ_{sd}) é um valor constante e não depende de β_x , pode ser representado no gráfico de $\mu \times \beta_x$ como uma reta. Havendo intersecção entre a reta e a curva, tem-se

a igualdade entre o momento resistente pelo concreto e o momento solicitante, $\mu = \mu_{sd}$. O valor de β_x para esta intersecção é definido como β_{x1} . As Figuras 5 e 6 apresentam o gráfico $\mu \times \beta_x$, identificando o ponto β_{x1}, μ_{sd} . Desse modo pode-se obter o valor de β_{x1} como segue:

Para $\mu_{sd} = \mu \rightarrow \mu_{sd} = \lambda \alpha_c \beta_{x1} \left(1 - \frac{\lambda}{2} \beta_{x1}\right)$:

$$\beta_{x1} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{2\mu_{sd}}{\alpha_c}} \quad (13)$$

No intervalo $0 < \beta_x \leq \frac{(1-\eta)}{\lambda}$, somente um valor de β_{x1} tem significado físico como o valor que atende a 2ª Equação de equilíbrio (Equação 10). Por outro lado no intervalo, $\frac{(1-\eta)}{\lambda} < \beta_x \leq \frac{(1+\eta)}{\lambda}$, os dois valores de β_{x1} e $\beta_{x1,2}$ são soluções da 2ª Equação de equilíbrio, ver Figura 5 ou 6. O valor de $\beta_{x1,2}$ é obtido como:

$$\beta_{x1,2} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{2\mu_{sd}}{\alpha_c}} \quad (14)$$

Analisando a situação apresentada no gráfico da Figura 5, juntamente com a 2ª equação de equilíbrio de momento (Equação 10) como segue:

$\mu_{sd} = \mu \pm \omega'_d \frac{\sigma'_s}{f_{ycd}} (1 - \eta)$, pode-se afirmar:

- para $\beta_x = \beta_{x1} > \eta$, ponto de intersecção no gráfico, tem-se $\mu_{sd} = \mu$, portanto a equação de equilíbrio é satisfeita se e somente se $\omega'_d \frac{\sigma'_s}{f_{yd}} = 0$ e consequentemente $A'_s = 0$ (armadura superior). Este é um caso de armadura simples com $\beta_x = \beta_{x1}$ e é uma solução da 2ª equação de equilíbrio, deste modo tem-se que buscar outras soluções no entorno desta;
- para $\beta_x < \beta_{x1}$, a 2ª equação de equilíbrio é satisfeita se a parcela $\omega'_d \frac{\sigma'_s}{f_{ycd}} (1 - \eta)$ for **somada** ao μ , resultando na equação: $\mu_{sd} = \mu + \omega'_d \frac{\sigma'_s}{f_{ycd}} (1 - \eta)$, onde a armadura superior é **comprimida** e diferente de zero ($A'_s \neq 0$), esta situação somente é possível se $\beta_x > \eta$, atendendo o caso em análise.
- para $\beta_x > \beta_{x1}$, a 2ª equação de equilíbrio é satisfeita se a parcela $\omega'_d \frac{\sigma'_s}{f_{ycd}} (1 - \eta)$ for **subtraída** de μ , resultando na equação: $\mu_{sd} = \mu - \omega'_d \frac{\sigma'_s}{f_{ycd}} (1 - \eta)$, onde a armadura superior é **tracionada** e diferente de zero ($A'_s \neq 0$), esta situação somente é possível se $\beta_x < \eta$, o que contradiz a condição em análise de $\beta_x = \beta_{x1} > \eta$, portanto não sendo solução aceitável.

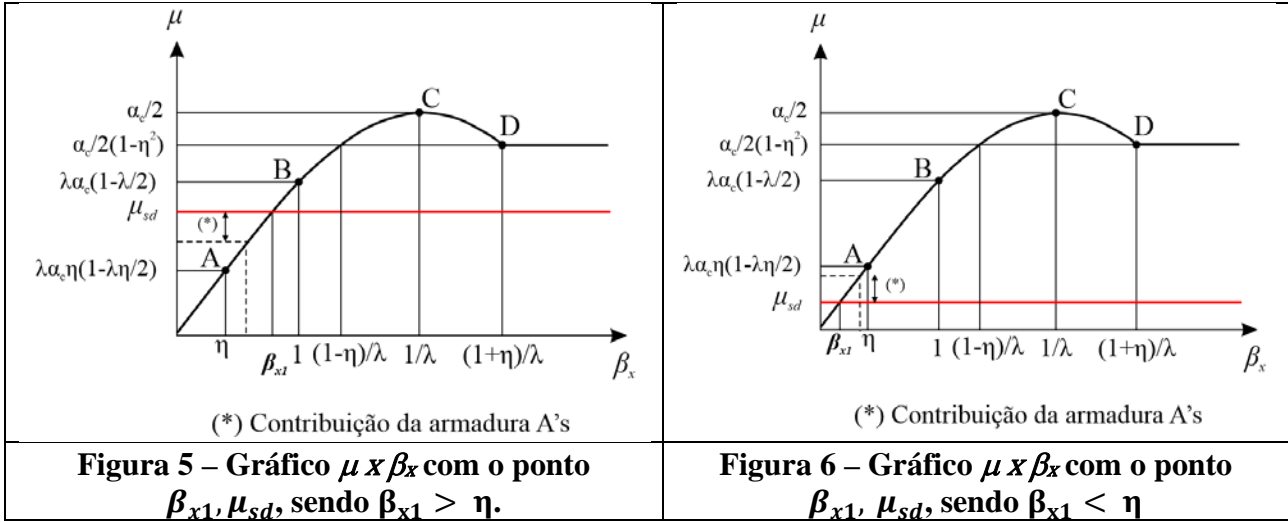
Do exposto acima com relação a Figura 5, a 2ª equação de equilíbrio (Equação 10) é satisfeita apenas para $\eta < \beta_x \leq \beta_{x1}$, onde se é possível duas situações, a primeira com $\beta_x = \beta_{x1}$ e $A'_s = 0$ (armadura simples), a segunda adotar um valor no intervalo $\eta < \beta_x < \beta_{x1}$ e $A'_s \neq 0$ e **comprimida**.

Analisando agora situação apresentada gráfico da Figura 6, juntamente com a 2ª equação de equilíbrio de momento, pode-se afirmar:

- para $\beta_x = \beta_{x1} < \eta$, ponto de intersecção no gráfico, tem-se $\mu_{sd} = \mu$, portanto a equação de equilíbrio é satisfeita se e somente se $\omega'_d \frac{\sigma'_s}{f_{yd}} = 0$ e consequentemente $A'_s = 0$ (armadura superior). Este é um caso de armadura simples com $\beta_x = \beta_{x1}$ e é uma solução da 2ª equação de equilíbrio, deste modo tem-se que buscar outras soluções no entorno desta;
- para $\beta_x < \beta_{x1}$, a 2ª equação de equilíbrio é satisfeita se a parcela $\omega'_d \frac{\sigma'_s}{f_{ycd}} (1 - \eta)$ for **somada** ao μ , resultando na equação: $\mu_{sd} = \mu + \omega'_d \frac{\sigma'_s}{f_{ycd}} (1 - \eta)$, onde a armadura superior é **comprimida** e diferente de zero ($A'_s \neq 0$), esta situação somente é possível se $\beta_x > \eta$, não atendendo o caso em análise.

- para $\beta_x > \beta_{x1}$, a 2ª equação de equilíbrio é satisfeita se a parcela $\omega'_d \frac{\sigma'_s}{f_{ycd}} (1 - \eta)$ for **subtraída** de μ , resultando na equação: $\mu_{sd} = \mu - \omega'_d \frac{\sigma'_s}{f_{ycd}} (1 - \eta)$, onde a armadura superior é tracionada e diferente de zero ($A'_s \neq 0$), esta situação somente é possível se $\beta_x < \eta$, atendendo a condição em análise de $\beta_x = \beta_{x1} < \eta$, portanto sendo solução aceitável.

Do exposta acima com relação a Figura 6, a 2ª equação de equilíbrio (Equação 10) é satisfeita apenas para $\beta_{x1} < \beta_x \leq \eta$, onde é possível duas situações, a primeira com $\beta_x = \beta_{x1}$ e $A'_s = 0$ (armadura simples), a segunda adotar um valor no intervalo $\beta_{x1} < \beta_x < \eta$ e $A'_s \neq 0$ e **tracionada**.



A partir das análises realizadas do gráfico das Figuras 5 e 6, dependendo do valor do momento reduzido (μ_{sd}), cinco casos podem ocorrer e estão apresentados na Tabela 3.

Tabela 3 – Intervalo de μ_{sd} e β_{x1} .

Caso	Intervalo de variação de μ_{sd}	Intervalo de β_{x1}	Intervalo de β_x que atende a 2ª equação de equilíbrio
A	$0 < \mu_{sd} \leq \lambda \alpha_c \eta \left(1 - \frac{\lambda \eta}{2}\right)$	$0 < \beta_{x1} \leq \eta$	$\beta_{x1} \leq \beta_x < \eta$
B	$\lambda \alpha_c \eta \left(1 - \frac{\lambda \eta}{2}\right) < \mu_{sd} \leq \lambda \alpha_c \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)$	$\eta < \beta_{x1} \leq 1$	$\eta < \beta_x \leq \beta_{x1}$
C1	$\lambda \alpha_c \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) < \mu_{sd} \leq \frac{\alpha_c}{2}$	$1 < \beta_{x1} \leq \frac{1}{\lambda}$	$1 < \beta_x \leq \beta_{x1}$
C2	$\frac{\alpha_c}{2} < \mu_{sd} \leq \lambda \alpha_c \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)$	$\frac{1}{\lambda} \leq \beta_{x1} < \frac{1 + \eta}{\lambda}$	$\frac{1 + \eta}{\lambda} < \beta_x \leq \beta_{x1}$
D	$\mu_{sd} > \frac{\alpha_c}{2}$	não existe β_{x1}	$\beta_x > \eta$

A partir da análise da 1ª equação de equilíbrio (Equação 9) é possível construir um gráfico de $\left(\omega + \omega'_d \frac{\sigma'_s}{f_{yd}}\right) \times \beta_x$. Como a parcela $\left(\omega'_d \frac{\sigma'_s}{f_{yd}}\right)$ é função de μ_{sd} , μ e η , da 2ª equação de equilíbrio (Equação 10), tem-se:

$$\mu_{sd} = \mu + \omega'_d \frac{\sigma'_s}{f_{yd}} (1 - \eta) \rightarrow \omega'_d \frac{\sigma'_s}{f_{yd}} = \frac{\mu_{sd} - \mu}{(1 - \eta)}, \text{ portanto:}$$

$$\omega + \omega'_d \frac{\sigma'_s}{f_{yd}} = \omega + \frac{\mu_{sd} - \mu}{(1-\eta)} \quad (15)$$

Define-se a função $\Psi(\beta_x) = \omega + \omega'_d \frac{\sigma'_s}{f_{yd}} = \omega + \frac{\mu_{sd} - \mu}{(1-\eta)}$. Substituindo-se μ ω da Equação 5, tem-se:

$$\Psi(\beta_x) = \lambda \alpha_c \beta_x + \frac{\mu_{sd} - \lambda \alpha_c \beta_x \left(1 - \frac{\lambda}{2} \beta_x\right)}{(1-\eta)} \quad (16)$$

Desta forma pode-se construir o gráfico das Figuras 7 e 8 da função $\Psi(\beta_x) \times \beta_x$. A Tabela 5 apresenta a definição dos pontos obtidos no gráfico (E, F, G e H).

Tabela 5 – Pontos do Gráfico da função $\Psi(\beta_x)$ por β_x .

Ponto E: (β_x, Ψ) = ($\beta_{x,E}, \Psi_E$)	$\beta_x = \beta_{x,E} = \eta$ Transição de A'_s tracionada para A'_s comprimida	$\Psi_E = \frac{2\mu_{sd} - \lambda \alpha_c \eta (2 - \lambda)}{2(1 - \eta)}$	($\beta_{x,E}, \Psi_E$) $= \left(\eta, \frac{2\mu_{sd} - \alpha_c \lambda \eta^2 (2 - \lambda)}{2(1 - \eta)} \right)$
Ponto F: (β_x, Ψ) = ($\beta_{x,F}, \Psi_F$)	$0 < \beta_x < \frac{(1 + \eta)}{\lambda}$ Ponto de mínimo de $\Psi(\beta_x)$ $\beta_x = \beta_{x,F} = \frac{\eta}{\lambda}$	$\Psi_F = \lambda \alpha_c \frac{\eta}{\lambda} + \frac{\mu_{sd} - \lambda \alpha_c \beta_x \left(1 - \frac{\lambda}{2} \frac{\eta}{\lambda}\right)}{(1 - \eta)}$	($\beta_{x,F}, \Psi_F$) $= \left(\frac{\eta}{\lambda}, \frac{2\mu_{sd} - \alpha_c \eta^2}{2(1 - \eta)} \right)$
Ponto G: (β_x, Ψ) = ($\beta_{x,G}, \Psi_G$)	$\beta_x = \beta_{x,G} = 1$ Transição do domínio 4 (A_s tracionada) para domínio 4a (A_s comprimido)	$\Psi_G = \lambda \alpha_c + \frac{\mu_{sd} - \lambda \alpha_c \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)}{(1 - \eta)}$	($\beta_{x,G}, \Psi_G$) $= \left(1, \frac{2\mu_{sd} + \alpha_c \lambda (2\eta - \lambda)}{2(1 - \eta)} \right)$
Ponto H: (β_x, Ψ) = ($\beta_{x,H}, \Psi_H$)	$\beta_x = \frac{1 + \eta}{\lambda}$	$\Psi_H = \lambda \alpha_c \frac{1 + \eta}{\lambda} + \frac{\mu_{sd} - \lambda \alpha_c \left(1 - \frac{\lambda}{2} \frac{1 + \eta}{\lambda}\right)}{(1 - \eta)}$	($\beta_{x,H}, \Psi_H$) $= \left(\frac{1 + \eta}{\lambda}, \frac{2\mu_{sd} + \alpha_c (1 - \eta^2)}{2(1 - \eta)} \right)$

Para uma dada seção transversal retangular conhecida, destaca-se que a curva do gráfico $\Psi(\beta_x) \times \beta_x$ representa a variação da parcela de força normal reduzida adimensional resistente pelo concreto comprimido e a armadura superior $\left(\omega \pm \omega'_d \frac{\sigma'_s}{f_{ycd}}\right)$, com a posição da linha neutra β_x .

Como a força normal solicitante reduzida v_d é um valor constante e não depende de β_x , pode ser representado no gráfico de $\Psi(\beta_x) \times \beta_x$ como uma reta. Havendo intersecção entre a reta e a curva, tem-se a igualdade entre a normal resistente pelo concreto e a armadura superior é a normal solicitante, $\Psi(\beta_x) = v_d$. O valor de β_x para esta intersecção é definido como β_{x2} . As Figuras 7 ou 8 apresentam os gráficos $\omega \pm \omega'_d \frac{\sigma'_s}{f_{ycd}} \times \beta_x$, identificando o ponto (β_{x2}, v_d) . Desse modo pode-se obter o valor de β_{x2} como segue:

$$v_d = \lambda \alpha_c \beta_{x2} + \frac{\mu_{sd} - \lambda \alpha_c \beta_{x2} \left(1 - \frac{\lambda}{2} \beta_{x2}\right)}{(1-\eta)} \quad (17)$$

$$\beta_{x2} = \frac{\eta}{\lambda} + \frac{\eta}{\lambda} \sqrt{1 + \frac{2}{\eta^2 \alpha_c} [(1 - \eta)v_d - \mu_{sd}]}; \quad \beta_{x2,2} = \frac{\eta}{\lambda} - \frac{\eta}{\lambda} \sqrt{1 + \frac{2}{\eta^2 \alpha_c} [(1 - \eta)v_d - \mu_{sd}]}$$

No caso do valor de v_d pertencer ao intervalo $\left(\frac{2\mu_{sd} - \alpha_c \eta^2}{2(1-\eta)}\right) < v_d \leq \left(\frac{\mu_{sd}}{2(1-\eta)}\right)$, os dois valores de β_{x2} e $\beta_{x2,2}$ são soluções da 1ª Equação de equilíbrio (Equação 9). Por outro lado se o valor de v_d pertencer ao intervalo $\left(\frac{\mu_{sd}}{2(1-\eta)}\right) < v_d \leq \frac{2\mu_{sd} + \alpha_c (1 - \eta^2)}{2(1-\eta)}$, somente o valor de β_{x2} tem significado físico como solução que atende a 1ª Eq. de Equilíbrio. A Figura 7 apresenta o gráfico $\Psi(\beta_x) \times \beta_x$, identificando o ponto $(\beta_x, \Psi) = (\beta_{x2}, v_d)$.

Ao analisar o gráfico da Figura 7, juntamente com a primeira equação de equilíbrio

$$v_d = \omega \pm \omega'_d \frac{\sigma'_s}{f_{ycd}} \mp \omega_d \frac{\sigma_s}{f_{yd}}, \text{ pode-se afirmar:}$$

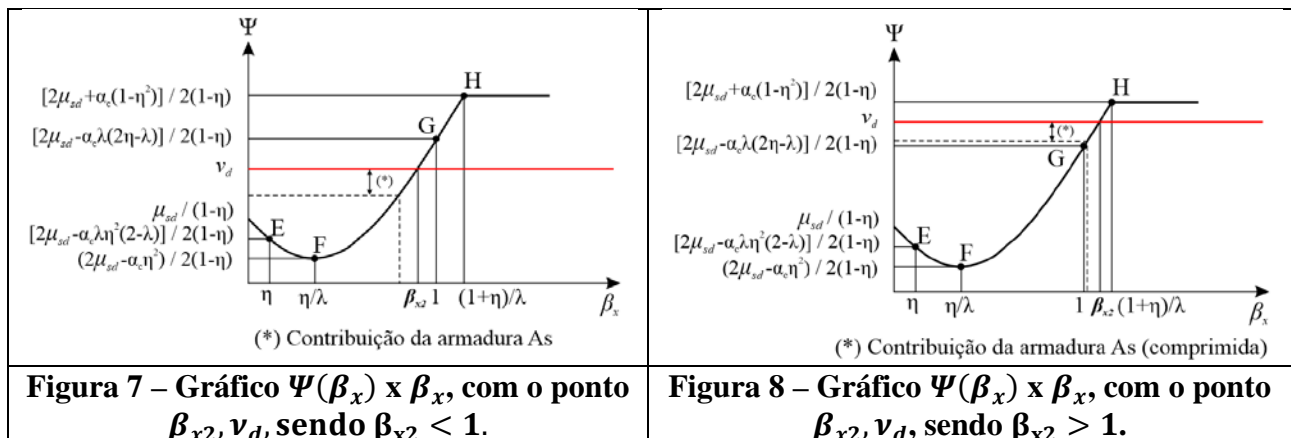
- Para $\beta_x = \beta_{x2} < 1$, ponto de intersecção no gráfico, tem-se $v_d = \omega + \omega'_d \frac{\sigma'_s}{f_{ycd}}$, portanto a equação de equilíbrio é satisfeita somente se $\omega_d \frac{\sigma_s}{f_{yd}} = 0$ e desse modo $A_s = 0$, portanto a primeira equação de equilíbrio é satisfeita com armadura inferior igual a zero.
- Para $\beta_x < \beta_{x2}$, a primeira equação de equilíbrio é satisfeita se somarmos a parcela $\omega_d \frac{\sigma_s}{f_{yd}}$ com $\omega + \omega'_d \frac{\sigma'_s}{f_{ycd}}$, resultando na equação $v_d = \omega + \omega'_d \frac{\sigma'_s}{f_{ycd}} + \omega_d \frac{\sigma_s}{f_{yd}}$, onde a armadura inferior é **comprimada** e diferente de zero ($A_s \neq 0$), esta situação somente é possível se $1 \leq \beta_x < +\infty$, portanto não sendo solução aceitável
- Para $\beta_x > \beta_{x2}$, a primeira equação de equilíbrio é satisfeita se subtrair a parcela $\omega_d \frac{\sigma_s}{f_{yd}}$ de $\omega + \omega'_d \frac{\sigma'_s}{f_{ycd}}$, resultando na equação $v_d = \omega + \omega'_d \frac{\sigma'_s}{f_{ycd}} - \omega_d \frac{\sigma_s}{f_{yd}}$, onde a armadura inferior é **tracionada** e diferente de zero ($A_s \neq 0$), esta situação somente é possível se $\beta_x < 1$, o que atende a condição de $\beta_x = \beta_{x1} < 1$, portanto sendo solução para a situação em análise.

Do exposto acima com relação a Figura 7, a 1ª equação de equilíbrio é satisfeita apenas para $0 < \beta_x \leq 1$, onde se é possível duas situações, a primeira com $\beta_x = \beta_{x2}$ e $A_s = 0$, a segunda adotar um valor no intervalo $\beta_{x2} \leq \beta_x < 1$ e $A_s \neq 0$ e **tracionada**.

A Figura 8, apresenta a situação com $\beta_{x2} > 1$, a observações com relação a $\beta_x = \beta_{x2}$ são as mesmas do caso anterior, e as observações para $\beta_x \neq \beta_{x2}$ são apresentadas a seguir

- $\beta_x < \beta_{x2} \rightarrow v_d = \omega + \omega'_d \frac{\sigma'_s}{f_{ycd}} + \omega_d \frac{\sigma_s}{f_{yd}} \therefore \omega_d \frac{\sigma_s}{f_{yd}} \neq 0 \rightarrow$ a 1ª equação de equilíbrio é satisfeita com armadura inferior diferente de zero ($A_s \neq 0$) e **comprimada**. Esta situação só será possível se $1 \leq \beta_x < +\infty$, que atende o caso em análise
- $\beta_x > \beta_{x2} \rightarrow v_d = \omega + \omega'_d \frac{\sigma'_s}{f_{ycd}} - \omega_d \frac{\sigma_s}{f_{yd}} \therefore \omega_d \frac{\sigma_s}{f_{yd}} \neq 0 \rightarrow$ a 1ª equação de equilíbrio é satisfeita com armadura inferior diferente de zero ($A_s \neq 0$) e **tracionada**. Esta situação só será possível se $0 < \beta_x < 1$, que não atende o caso em análise.

Do exposta acima com relação a Figura 8, a 1ª equação de equilíbrio é satisfeita apenas para $1 < \beta_x \leq +\infty$, onde se é possível duas situações, a primeira com $\beta_x = \beta_{x2}$ e $A_s = 0$, a segunda adotar um valor no intervalo $1 < \beta_x \leq \beta_{x2}$ e $A_s \neq 0$ e **comprimada**.



Finalmente existe a possibilidade de obter uma solução com $\beta_{x2} = 1$ para satisfazer a 1ª equação de equilíbrio o único valor de $\beta_x = \beta_{x2} = 1$, portanto A_s será nula. A partir das análises realizadas do gráfico das Figuras 7 e 8, dependendo do valor da normal reduzida v_d , cinco situações podem ocorrer (Tabela 6).

Tabela 6 – Intervalo de v_d e β_{x2} .

Caso	Intervalo de variação de v_d	Intervalo de β_{x2}	Intervalo de β_x que atende a 1ª equação de equilíbrio
1	$v_d < \frac{2\mu_{sd} - \alpha_c \eta^2}{2(1 - \eta)}$	não existe β_{x2}	$0 < \beta_x < \infty$
2a	$\frac{2\mu_{sd} - \alpha_c \eta^2}{2(1 - \eta)} < v_d < \frac{2\mu_{sd} + \alpha_c(1 - \eta^2)}{2(1 - \eta)}$	$\beta_{x2} < 1$	$\beta_{x2} \leq \beta_x < 1$
2b		$\beta_{x2} = 1$	$\beta_x = \beta_{x2} = 1$
2c			$1 < \beta_x \leq \beta_{x2}$
3	$v_d > \frac{2\mu_{sd} + \alpha_c(1 - \eta^2)}{2(1 - \eta)}$	não existe β_{x2}	$1 < \beta_x < \infty$

Portanto, para o dimensionamento de uma seção de concreto armado deve-se primeiramente intersectar os intervalos de β_x da 2ª e da 1ª equação de equilíbrio. Caso a interseção não for um conjunto vazio, o intervalo resultante é o conjunto de valores de β_x que atendem simultaneamente as duas equações de equilíbrio. Caso contrário, a interseção resulte em um conjunto vazio, significa que não existe valor de β_x que atenda simultaneamente as duas equações de equilíbrio.

Em seguida, de posse do intervalo de β_x que atenda simultaneamente as duas equações de equilíbrio, pode-se adotar um valor de β_x mais conveniente, dentro do intervalo, e com as equações de equilíbrio, equações de compatibilidade obtêm-se os valores das armaduras A_s e A'_s .

Conclusões

Neste trabalho foi apresentada uma metodologia atualizada gráfica, de Gilson B Fernandes (2006), para o dimensionamento de seções retangulares submetidas a flexão composta normal com força normal de compressão, tanto para concretos da Classe 1 como da Classe 2. Com esta metodologia é possível encontrar um intervalo seguro de valores de β_x que atende simultaneamente as duas equações de equilíbrio dos esforços em uma seção transversal, evitando com isso o desgaste, a incerteza de processos iterativos que muitas vezes podem conduzir a soluções que não atendam as duas equações de equilíbrio.

De posse do intervalo de β_x é possível saber quais domínios de deformação que atende simultaneamente as duas equações de equilíbrio. Este fato, facilita a escolha de um valor β_x , dentro do intervalo, para se obter as armaduras mais econômicas ou armaduras simétricas ou outra disposição que melhor atende os objetivos do projeto.

Finalmente pode-se afirmar que esta metodologia é muito útil no dimensionamento de seções retangulares submetidas a flexão composta normal com força normal de compressão sem a necessidade de conhecer a priori as armaduras, dando mais segurança, principalmente aos engenheiros sem experiência neste tipo de dimensionamento.

Referências

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 6118: Projeto de Estruturas de Concreto - Procedimento**. Rio de Janeiro, 2014.
- TOZATO, L.; ALMEIDA, L. C.; SIQUEIRA, G. H.; TRAUTWEIN, L. M.; SILVA, M. A. **Estudo Paramétrico do Bloco de Tensão Adotado no Dimensionamento de Elementos de Concreto Armado Segundo A NBR6118-2014**. In: 58º Congresso Brasileiro do Concreto, 2016, Belo Horizonte.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI 318 – Building Code Requirements for Structural Concrete**. 2005.
- FUSCO, P. B. **Estruturas de Concreto - Solicitações Normais**. Rio De Janeiro: Editora Guanabara Dois S.A., 1981.
- GILSON B. FERNANDES. **Solicitações Normais: Cálculo no Estado Limite Último**. Apostila da disciplina EC702 – Concreto Armado. Universidade Estadual de Campinas – FEC – Departamento de Estruturas. 2006.