

Análise Numérica de Funções de Impedância em Solo Homogêneo **André Vítor Bolanho Rocha de Oliveira¹, Sergio Hampshire de Carvalho Santos²**

¹Universidade Federal do Rio de Janeiro / andrevbro@gmail.com

²Universidade Federal do Rio de Janeiro / sergiohampshire@gmail.com

Resumo

Muitas dúvidas ainda existem a respeito do comportamento da interação solo-estrutura no projeto de fundações de máquinas sujeitas a carregamentos dinâmicos. Correntemente assumem-se diversas hipóteses simplificadoras, como a aplicação de soluções estáticas. Uma das dúvidas existentes diz respeito à obtenção e ao comportamento das funções de impedância, que expressam a rigidez e o amortecimento do solo. No presente trabalho, é analisado o comportamento dessas funções com a variação da frequência excitadora, para o problema do solo homogêneo em um semiespaço, aplicando uma formulação matematicamente robusta. É mostrado como se aplica a formulação proposta em modelos de interface em uma fundação superficial de formato retangular. É apresentada uma comparação dos valores de rigidez e de amortecimento obtidos com os de outras formulações clássicas consolidadas, apresentadas neste trabalho. A análise dos resultados permitiu concluir que o amortecimento e a rigidez seguem distribuições distintas e geometricamente variáveis na interface solo-fundação.

Palavras-chave: Fundações de Máquinas, Funções de Impedância, Modelos Numéricos, Análise Dinâmica.

Introdução

Muitos dos problemas que concernem as análises dinâmicas realizadas nas estruturas, em especial ao projeto de fundações de máquinas não possuem respostas conhecidas ou consolidadas, para algumas de suas questões. Assim, o comportamento dessas estruturas nem sempre é bem representado, sendo sujeito a diversas simplificações.

Uma das dúvidas mais pertinentes no que diz respeito a este projeto é sobre o comportamento e a distribuição das funções de impedância, ou seja, qual a variação geométrica e com a frequência excitadora destas funções, mesmo considerando a hipótese sempre simplificadora de que o solo pode ser modelado como homogêneo. Esta pesquisa objetiva estudar a modelagem da interface entre solo e estrutura em fundações de máquinas, a distribuição e o comportamento das funções de impedância, amortecimento e rigidez, considerando o solo como homogêneo em um semiespaço, por meio de modelos numéricos, em uma malha discretizada, utilizando uma formulação matematicamente robusta.

Nesta formulação, o problema é resolvido aplicando-se a metodologia de Wolf (1985), que propõe equações básicas para modelagem da matriz de rigidez dinâmica do solo, de acordo com o cálculo de funções de influência de flexibilidade. É considerada a discretização de molas e amortecedores na base, centradas nos elementos de uma malha. Obtém-se uma distribuição não-uniforme das funções de impedância, mesmo considerado o solo como homogêneo.

A adequação das respostas obtidas é comprovada pela comparação com valores de rigidez e de amortecimento obtidos com formulações clássicas utilizadas em projeto, como as de Richart *et al.* (1970) e de Wolf (1994). A análise dos resultados permite concluir que os coeficientes de amortecimento e a rigidez seguem distribuições distintas e geometricamente variáveis na interface solo-fundação.

Este trabalho resume alguns dos resultados obtidos no Projeto de Graduação do primeiro autor, orientado pelo segundo autor (Oliveira, 2021).

Metodologia

Definição da fundação estudada

Neste trabalho é analisada a interface entre o solo e a face inferior de uma fundação rígida, criando uma malha que representa o contorno da superfície do solo, de modo que sejam criados elementos de interface estrutura-solo. Cria-se um modelo analítico de forma a representar a interface entre o terreno e o bloco da fundação. Apesar do exemplo apresentado seja o de uma fundação retangular, o modelo pode se aplicar em fundações de formato qualquer, como mostrado por OLIVEIRA (2021).

No exemplo aqui apresentado, é estudada uma fundação retangular de dimensões 3,15m x 1,80m, com malha discretizada em elementos quadrados de 0,225m, vide a Figura 1.

Visando realizar a análise numérica assimilando-se a um solo homogêneo, e de modo a comparar os resultados com os obtidos por Wolf (1985), adotam-se os seguintes valores nominais na modelagem:

$$\nu = 0,30; G = 1 \text{ kN/m}^2; \rho = 1 \text{ Mg/m}^3$$

São calculadas para essa geometria os coeficientes de rigidez e os coeficientes de amortecimento de acordo com as expressões de formulações clássicas de Wolf (1994) e de Richart (1970). Esses valores são comparados aos valores obtidos por meio da formulação baseada em Wolf (1985), a ser desenvolvida em sequência.

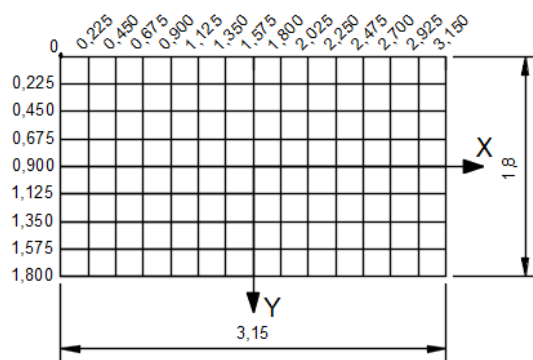


Figura 1 – Malha do modelo.

Modelagem do solo

O solo é modelado como um meio homogêneo, seguindo comportamento elástico-linear, utilizando-se molas e amortecedores posicionados no centro de cada elemento de uma malha, formando um único elemento sólido reticulado. Essa distribuição é realizada de maneira não uniforme, obedecendo à consideração da matriz condensada do solo.

Conforme essa hipótese, considera-se o solo como um semiespaço homogêneo e elástico, representado por uma matriz de rigidez complexa que relaciona as forças aplicadas aos deslocamentos.

Os amortecedores do tipo viscoso são montados na matriz de maneira similar à matriz de rigidez. O amortecimento do material, que é da dissipação de energia no material, do tipo histerético, pode ser considerado através dos módulos complexos, por:

$$E^* = E(1 + \xi_{hist} \cdot i) \quad (1)$$

$$G^* = G(1 + 2 \cdot \xi_{hist} \cdot i) \quad (2)$$

Onde,

E^*, G^* – Módulos de deformação longitudinal e transversal complexos;

E, G – Módulos de deformação longitudinal e transversal;

ξ_{hist} – Fração de amortecimento histerético do material;

i – Unidade imaginária.

Implementação matemática

Conforme a metodologia apresentada por Wolf (1985), são calculadas as velocidades de onda de cisalhamento e de onda primária respectivamente pelas expressões a seguir:

$$V_S = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (3)$$

$$V_P = V_S \cdot \sqrt{\frac{2 - 2\nu}{1 - 2\nu}} \quad (4)$$

Em que,

- V_P – Velocidade de onda de principal ou de compressão;
- V_S – Velocidade de onda secundária ou de cisalhamento;
- ν – Coeficiente de Poisson;
- ρ – Massa específica;

Em seguida, são definidos os parâmetros $s(k)$ e $t(k)$, que transformam o problema do domínio da frequência para o domínio do número de onda (k):

$$s(k) = -i \cdot \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{V_P^2 \cdot k^2}} \quad (5)$$

$$t(k) = -i \cdot \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{V_S^2 \cdot k^2}} \quad (6)$$

Onde,

- k – Número de onda;
- ω – Frequência circular natural.

A função de flexibilidade que representa o deslocamento devido a uma pressão unitária para o problema axissimétrico, em uma fundação circular é dada por:

$$F_{ww}(k) = \frac{1}{k \cdot G} \cdot \frac{-i \cdot s(k)(1 + t(k)^2)}{(1 - t(k)^2)^2 + 4 \cdot s(k) \cdot t(k)} \quad (7)$$

Conforme explicitado por Wolf (1985), por eficiência computacional, é assumida a carga atuante num subdisco circular permitindo o uso de coordenadas cilíndricas. Essa carga é expandida em série de Fourier na direção radial.

Assume-se que o carregamento vertical atuando em um círculo possui amplitude constante. A amplitude de deslocamento $w(r)$ que surge à distância r do centro do subdisco é dada pela seguinte expressão:

$$w(r) = a \left[\int_{k=0}^{\infty} J_1(ka) \cdot F_{ww}(k) \cdot J_0(kr) dk \right] r_0 = g(r)r_0 \quad (8)$$

Onde,

- a – Raio do subdisco;
- J_1 – Função de Bessel de ordem 1;
- J_0 – Função de Bessel de ordem 0;
- r_0 – Amplitude constante da carga na direção vertical.

As funções de Bessel realizam a transformação do estado plano para o estado axissimétrico. E como k , o número de onda, varia de 0 a infinito, todos os tipos de onda são capturados nesta formulação (WOLF, 1985). A parte real de cada termo do resultado da equação (8) é equivalente ao valor da rigidez no sentido vertical da expressão (9) de Wolf (1985) a seguir, para fundações retangulares, e a parte imaginária corresponde à expressão (11) de Richart (1970).

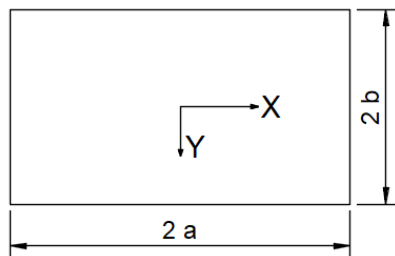


Figura 2 – Orientação dos eixos conforme formulação de fundações retangulares de Wolf (1994).

$$K_z \left(\frac{kN}{m} \right) = \frac{Gb}{1-\nu} \left(3,1 \left(\frac{a}{b} \right)^{0,75} + 1,6 \right) \quad (9)$$

Em que a e b são as dimensões da fundação, com a orientação da Figura 2, e $a \geq b$.

Já os parâmetros de Richart (1970) para a rigidez vertical (K_z) e para o amortecimento vertical (C_z) de uma fundação circular são dados por:

$$K_z = \frac{4Gr}{1-\nu} \quad (10)$$

$$C_z = \frac{3,4r^2}{1-\nu} \sqrt{\rho G} \quad (11)$$

Pela hipótese de Winkler (ABMS/ABEF, 2002), tem-se que a aplicação pressões verticais na superfície do solo, provoca deslocamentos proporcionais a essas pressões, somente na região de aplicação das mesmas, ignorando a continuidade do meio. Isso permite a consideração de que a modelagem da interface solo-estrutura pode ser realizada por meio de molas com rigidez equivalentes e amortecedores.

A Figura 3 a seguir mostra como é o comportamento real dos deslocamentos causados pela aplicação das cargas verticais em uma placa rígida.

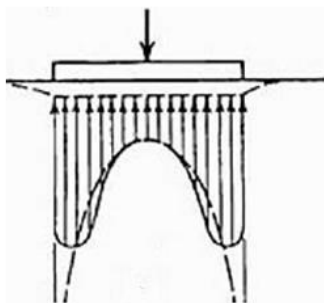


Figura 3 – Pressões de contato em placa rígida sobre solo homogêneo (ABMS/ABEF, 2002).

A linha tracejada representa a curva teórica, que desconsidera a plastificação do solo, e é obtida pela Teoria da Elasticidade. São encontradas tensões maiores nas bordas, tendendo a infinito, o que é incompatível com o caso físico real. Já a linha cheia é uma representação mais realística da distribuição de tensões, apresentando uma suavização da curva, causada pela plastificação do solo na região próxima às bordas.

Análise da fundação estudada

Para a modelagem da fundação, os pontos nodais da matriz condensada do solo localizam-se no centro de cada elemento da malha. Admite-se que os deslocamentos verticais, em cada área de influência do elemento, são aproximadamente constantes e iguais aos do ponto nodal. Isto é, considera-se o valor do deslocamento no ponto nodal como valor médio do deslocamento em cada elemento, em sua área de influência, conforme a Figura 4 a seguir. Para se obter a matriz de flexibilidade, a interface entre solo e fundação é discretizada em elementos quadrados de lado com dimensões de 0,225 m, conforme supramencionado.

A área é calculada como de uma circunferência de raio equivalente, de modo que resulte em uma área igual à do elemento quadrado da malha.

Considera-se por aproximação o desacoplamento entre os três graus de liberdade translacionais de cada nó para obter-se a matriz de flexibilidade, com o cálculo apenas dos deslocamentos no sentido vertical.

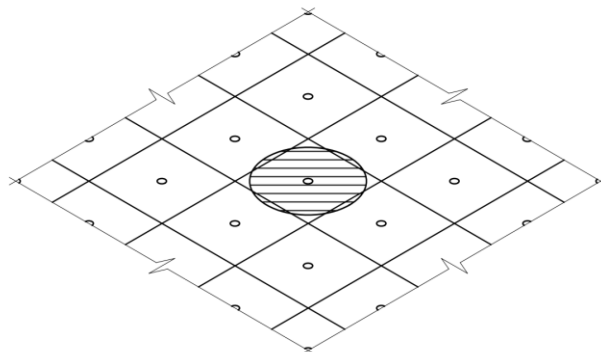


Figura 4 – Área de influência de um ponto nodal.

Supondo um elemento circular de área igual à do elemento da malha, o deslocamento vertical distante r do ponto de aplicação de uma carga vertical P , é calculado pela expressão dos deslocamentos verticais (8) de Wolf (1985), cuja parte real é equivalente ao valor obtido para deslocamentos verticais pela Fórmula de Boussinesq (12) para o deslocamento vertical, baseada na Teoria da Elasticidade.

$$\delta_v = \frac{(1 - \nu) \cdot P}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot G} \quad (12)$$

Onde,

r – Distância do ponto de aplicação da força unitária ao ponto central do elemento da malha analisado;

δ_v – Deslocamento vertical distante r do ponto de aplicação da carga P (unitária na formulação)

É preciso ressaltar que, segundo a teoria, os deslocamentos para os elementos da diagonal principal tenderiam ao infinito, o que não seria correto.

Nestes elementos, para obter a correlação entre a força aplicada em um ponto e os deslocamentos provocados em sua própria área de influência devem ser empregadas as soluções analíticas dos coeficientes de rigidez e amortecimento de placas circulares rígidas sob a ação de forças verticais (expressões (10) e (11) de Richart (1970)), sendo os termos diagonais numericamente iguais ao inverso desses coeficientes.

Ou seja, os termos de flexibilidade na diagonal devem ser obtidos aplicando uma carga unitária na rigidez complexa obtida com o raio real $r = 1,343\text{m}$, com K e C obtidos com as fórmulas de fundação rígida circular. Então, para se obter uma matriz de flexibilidade $m \times n$ utiliza-se a seguinte regra:

$$f_{v_{m,n}} = \begin{cases} \frac{w(r_{m,n})}{\pi} & \text{se } m \neq n \\ \frac{1}{K - i \cdot \omega \cdot C} & \text{se } m = n \end{cases} \quad (13)$$

A matriz de rigidez do solo é obtida, então, pela parte real da sua matriz de flexibilidade invertida. Já a matriz de amortecimento é obtida da mesma forma, porém sendo a parte imaginária da matriz inversa da matriz de flexibilidade.

Esse processo trata da criação de um elemento de interface, empregando uma subdivisão da superfície entre solo e estrutura, o que torna esse método mais eficiente do que o Método dos Elementos Finitos na análise de problemas de fundações tridimensionais.

Genericamente, podemos demonstrar o procedimento da montagem da matriz de flexibilidade pela Figura 5 a seguir, em que é representado, para a aplicação de uma carga unitária, o campo de deslocamentos no próprio ponto de aplicação e nos demais pontos, a ele adjacentes. O deslocamento é maior no próprio ponto de aplicação e conforme se afasta desse ponto, os deslocamentos são menores.

Para a carga unitária, o deslocamento é equivalente à flexibilidade e monta-se a matriz de flexibilidade com os coeficientes conforme a Figura 5, até completar as m linhas e n colunas da matriz. A matriz de flexibilidade f_v é invertida e sua parte real corresponde à rigidez, enquanto a parte imaginária corresponde ao amortecimento.

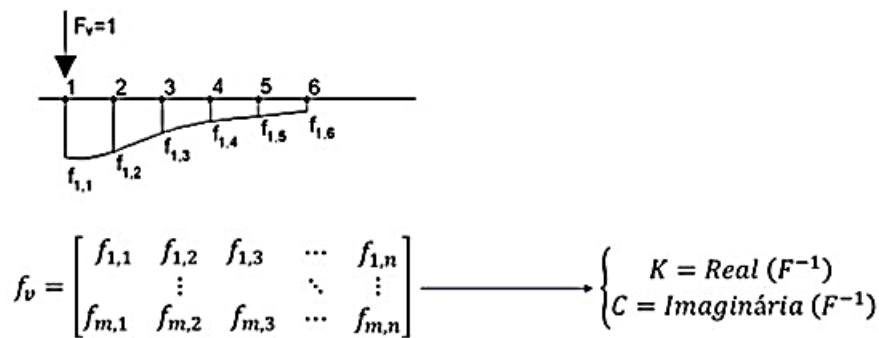


Figura 5 – Montagem da matriz de flexibilidade.

Se se multiplicar a matrizes de rigidez e de amortecimento por um vetor de forças, que no caso é unitário, obtêm-se a rigidez total em cada um dos elementos da malha discretizada e ao se somar todos esses valores, têm-se a rigidez total. O mesmo vale para o amortecimento.

Os resultados são avaliados por meio de uma análise adimensional para viabilizar melhores comparações e de caráter mais geral. Wolf (1985) decompõe a matriz de rigidez dinâmica conforme a seguinte expressão:

$$[S_z] = [K](k + i \cdot a_0 \cdot c) \quad (14)$$

A matriz K contém os coeficientes de rigidez estática, ou seja, a rigidez obtida para frequência excitadora nula ($\omega = 0$). As matrizes k e c são os coeficientes de mola e amortecimentos adimensionais.

As expressões dos parâmetros adimensionais de k e c , que relacionam respectivamente a rigidez e amortecimento no sentido vertical em relação aos valores obtidos com as conforme as expressões (15) e (16) de Luco (1974). Importante ressaltar que o coeficiente de amortecimento adimensional deve ser dividido não só pelo valor teórico, mas por ω , uma vez que a parte complexa é multiplicada por esse valor.

$$k = \frac{K_{\text{calculado}}}{K_{\text{teórico}}} \quad (15)$$

$$c = \frac{C_{\text{calculado}}}{\omega \cdot C_{\text{teórico}}} \quad (16)$$

Nas expressões acima, $K_{\text{teórico}}$ é expresso por (9). Já $C_{\text{teórico}}$ é expresso por (11).

Esses valores de k e c são calculados com a variação do parâmetro a_0 que representa a frequência adimensional.

$$a_0 = \frac{\omega \cdot r}{V_s} \quad (17)$$

Onde,

- a_0 – Frequência adimensional;
- ω – Frequência circular natural;
- r – Raio equivalente de um elemento da malha;

Obtenção e análise dos resultados

A partir dos dados iniciais e da formulação descrita, são obtidos os resultados apresentados a seguir. Para efeito de comparação e validação inicial, as funções de influência da amplitude vertical de deslocamento, separadas em suas parcelas reais e imaginárias para a_0 iguais a 0,2 e 1 resultam em valores idênticos aos de Wolf (1985) em sua figura P7-9.

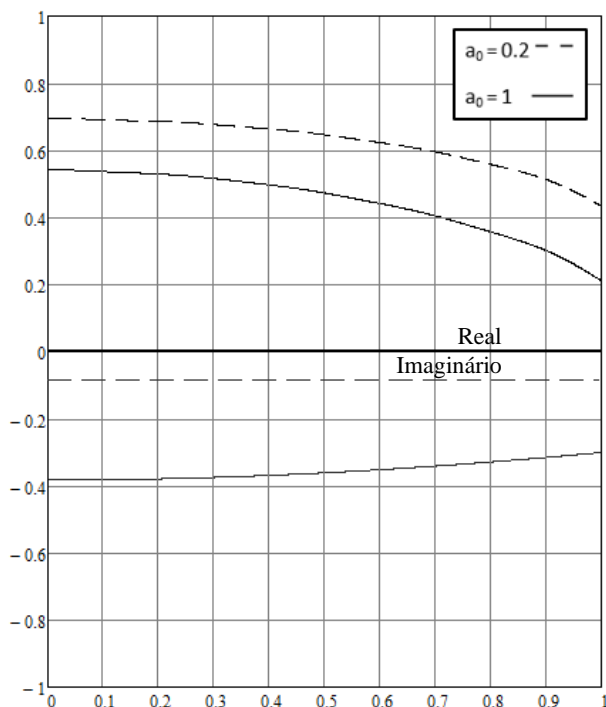


Figura 6 – Amplitude de deslocamento vertical em função do raio.

São, então, avaliados os valores de rigidez e amortecimento verticais. A fim de realizar uma comparação da distribuição das funções de impedância ao longo da fundação, são representados a seguir os valores para os coeficientes de rigidez e de amortecimento. É possível observar pelas Figuras 7 e 8, que as funções de impedância apresentam maiores valores nas bordas da fundação.

0,2120	0,1702	0,1368	0,1135	0,1042	0,1104	0,1157	0,1157	0,1104	0,1042	0,1135	0,1368	0,1702	0,2120
0,1708	0,1251	0,0885	0,0637	0,0554	0,0664	0,0749	0,0749	0,0664	0,0554	0,0637	0,0885	0,1251	0,1708
0,1344	0,0837	0,0432	0,0170	0,0127	0,0285	0,0401	0,0401	0,0285	0,0127	0,0170	0,0432	0,0837	0,1344
0,1069	0,0512	0,0069	-0,0199	-0,0197	-0,0004	0,0133	0,0133	-0,0004	-0,0197	-0,0199	0,0069	0,0512	0,1069
0,1069	0,0512	0,0069	-0,0199	-0,0197	-0,0004	0,0133	0,0133	-0,0004	-0,0197	-0,0199	0,0069	0,0512	0,1069
0,1344	0,0837	0,0432	0,0170	0,0127	0,0285	0,0401	0,0401	0,0285	0,0127	0,0170	0,0432	0,0837	0,1344
0,1708	0,1251	0,0885	0,0637	0,0554	0,0664	0,0749	0,0749	0,0664	0,0554	0,0637	0,0885	0,1251	0,1708
0,2120	0,1702	0,1368	0,1135	0,1042	0,1104	0,1157	0,1157	0,1104	0,1042	0,1135	0,1368	0,1702	0,2120

Figura 7 – Distribuição dos coeficientes de rigidez vertical (K_z) para o caso estático.

0,0098	0,0079	0,0064	0,0053	0,0048	0,0051	0,0054	0,0054	0,0051	0,0048	0,0053	0,0064	0,0079	0,0098
0,0079	0,0058	0,0041	0,0030	0,0026	0,0031	0,0035	0,0035	0,0031	0,0026	0,0030	0,0041	0,0058	0,0079
0,0062	0,0039	0,0020	0,0008	0,0006	0,0013	0,0019	0,0019	0,0013	0,0006	0,0008	0,0020	0,0039	0,0062
0,0050	0,0024	0,0003	-0,0010	-0,0009	0,0000	0,0006	0,0006	0,0000	-0,0009	-0,0010	0,0003	0,0024	0,0050
0,0050	0,0024	0,0003	-0,0010	-0,0009	0,0000	0,0006	0,0006	0,0000	-0,0009	-0,0010	0,0003	0,0024	0,0050
0,0062	0,0039	0,0020	0,0008	0,0006	0,0013	0,0019	0,0019	0,0013	0,0006	0,0008	0,0020	0,0039	0,0062
0,0079	0,0058	0,0041	0,0030	0,0026	0,0031	0,0035	0,0035	0,0031	0,0026	0,0030	0,0041	0,0058	0,0079
0,0098	0,0079	0,0064	0,0053	0,0048	0,0051	0,0054	0,0054	0,0051	0,0048	0,0053	0,0064	0,0079	0,0098

Figura 8 – Distribuição dos coeficientes de amortecimento vertical (C_z) para o caso estático.

São representados os valores das funções de impedância em seções de corte determinadas de modo que interceptem o centro elástico da fundação, paralelamente ao eixo Y, em três casos: um estático, com frequências $a_0 = 0$, um com $a_0 = 1$ e outro com $a_0 = 2$. É possível observar uma semelhança nas Figuras 9 e 10 com a Figura 3. Pode-se concluir que, apesar de se observar o efeito do enrijecimento nas extremidades para as duas funções, o comportamento destas é diferente, com a rigidez assumindo menores valores no centro, com maiores frequências.

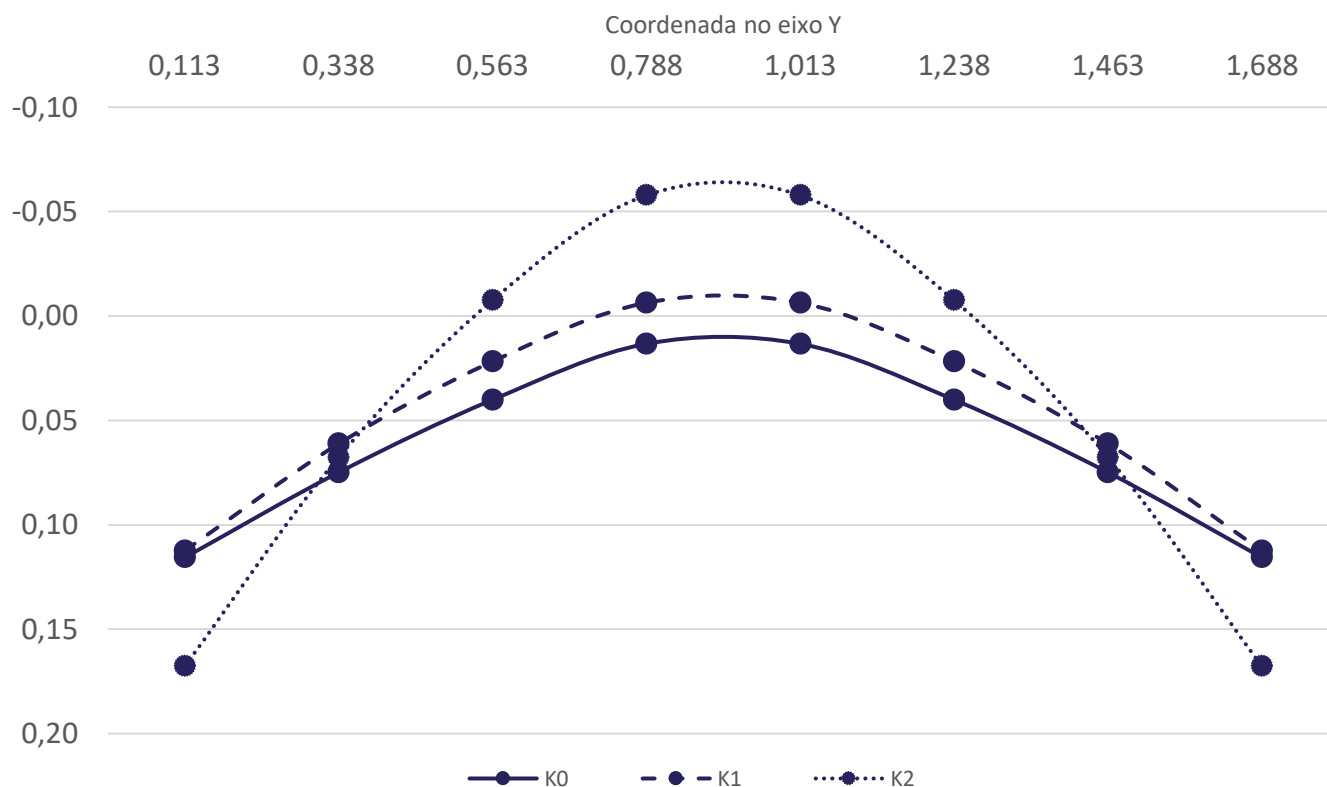


Figura 9 – Distribuição da função de rigidez em corte no sentido paralelo ao eixo Y.

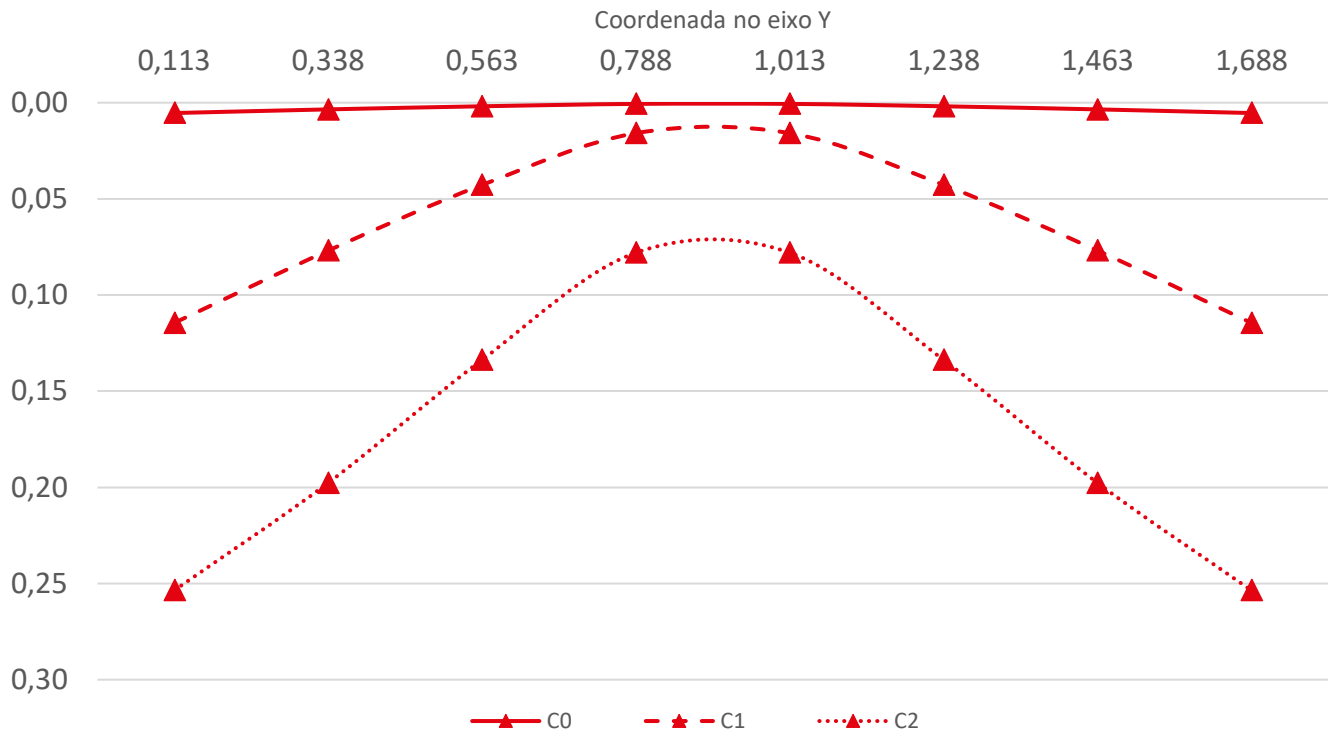


Figura 10 – Distribuição da função de amortecimento em corte no sentido paralelo ao eixo Y.

A seguir apresenta-se na Figura 11, a variação dos parâmetros adimensionais de rigidez e amortecimento com o aumento da frequência adimensional a_0 , respectivamente calculados de acordo com as expressões (15), (16) e as frequências adimensionais, conforme (17).

Observa-se uma diferença na tendência do comportamento das funções de impedância. Enquanto a rigidez apresenta uma curva mais sinuosa, ou seja, apresenta uma maior variação, a função do amortecimento é praticamente constante com a variação das frequências. A rigidez total cresce com a_0 , e apresenta maiores variações. Os valores de amortecimento diminuem, com uma tendência de manter-se praticamente constantes.

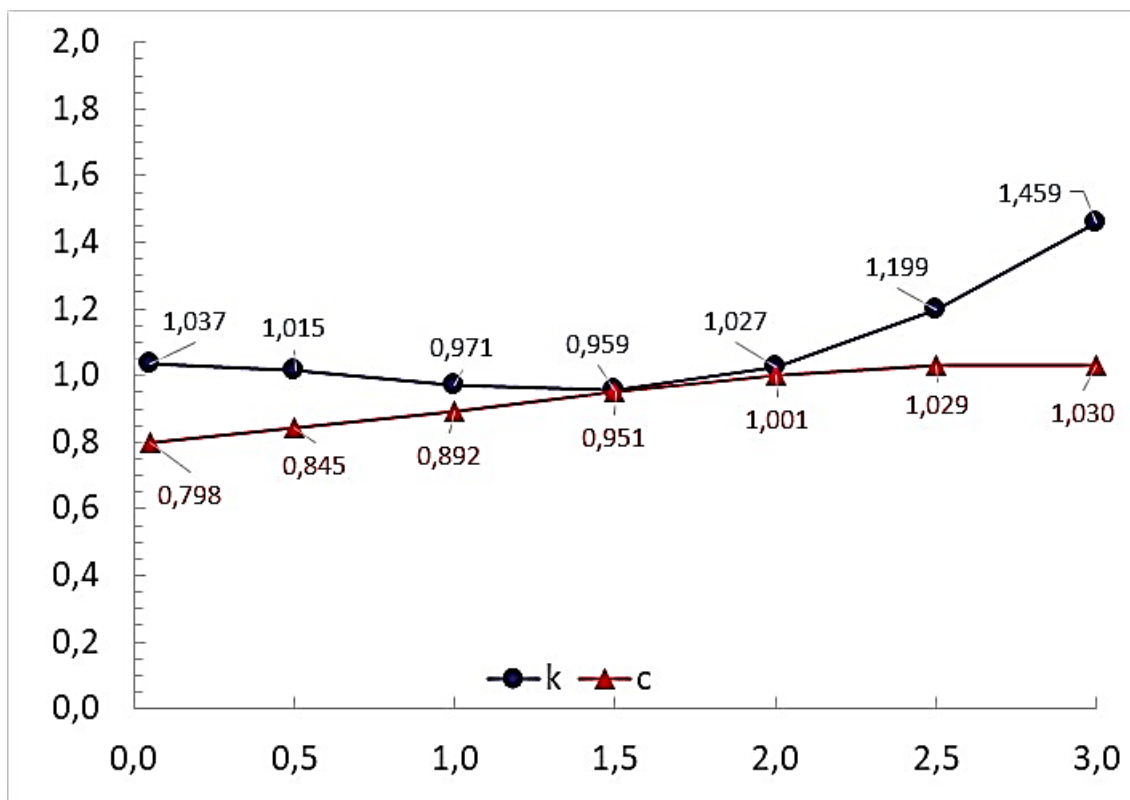


Figura 11 – Coeficientes de rigidez e amortecimento adimensionais verticais.

Esses resultados são comparáveis com os apresentados por Wolf (1985) em seu exemplo da Fig. 7-11. Em valores com a_0 menor ou igual a 2, os resultados são excelentes. Após esse valor, há uma certa instabilidade, em que o resultado para a rigidez começa a crescer de maneira rápida, o que também é observado no exemplo de Wolf (1994) supramencionado.

Os valores da rigidez K e do amortecimento C podem ser reconstituídos a partir da Figura 11 com a equação (17).

Tabela 1 – Valores calculados numericamente e valores teóricos tradicionais na direção vertical.

ω	0,074	0,370	0,741	1,111	1,481	1,852	2,222	Teórico
a_0	0,100	0,500	1,000	1,500	2,000	2,500	3,000	
K_z	8,422	8,242	7,889	7,785	8,342	9,738	11,849	8,121
C_z	3,620	7,410	7,821	8,338	8,773	9,018	9,033	8,766

Conclusões

A definição dos coeficientes de rigidez e de amortecimento do solo deve buscar um arranjo de modo que as distribuições das tensões na interface entre o solo e a fundação sejam mais próximas o possível da que ocorrerá na realidade. Para esse cálculo, é necessário aplicar formulações matematicamente robustas, como a aqui apresentada.

As Figuras 9 e 10 evidenciam que o efeito do enrijecimento nas extremidades da fundação são aplicáveis ao amortecimento, porém o comportamento das duas funções é diferente, com a rigidez assumindo menores valores no centro com o incremento de frequências, ao contrário do amortecimento.

Os resultados obtidos nos cálculos, como observado na Figura 11, evidenciam que a suposição usual de que a rigidez e o amortecimento possuem comportamentos similares é equivocada. Na verdade, as distribuições das funções de impedância ocorrem de forma diferente para diferentes frequências. Porém, a suposição usual de que para solo homogêneo, os coeficientes de rigidez e de amortecimento são praticamente independentes da frequência, é confirmada na Figura 11.

Há uma instabilidade após $a_0 = 2,0$ na formulação aplicada, com crescimento dos valores da rigidez. Para valores de a_0 igual ou inferiores a 2 os resultados são excelentes.

No entanto, a utilização de modelos numéricos, em algumas situações, pode apresentar resultados pouco conservadores. Evidencia-se a importância de um estudo cuidadoso de cada situação a ser modelada, devido à complexidade do problema dinâmico em questão.

Referências

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE MECÂNICA DOS SOLOS E ENGENHARIA GEOTÉCNICA (ABMS) e ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE EMPRESAS DE ENGENHARIA DE FUNDAÇÕES E GEOTECNIA (ABEF), Fundações, Teoria e Prática, 2ª ed., Editora Pini, São Paulo, SP, Brasil, 2002.
- LUCO, J. E., Impedance Functions for a Rigid Foundation on a Layered Medium, Nuclear Engineering and Design Vol.31, 1974.
- OLIVEIRA, A.V.B.R. Análise Numérica de Funções de Impedância em Solo Homogêneo. Rio de Janeiro. Projeto de Graduação, Escola Politécnica da UFRJ, 2021.
Disponível em: <http://www.repositorio.poli.ufrj.br/monografias/projpoli10034346.pdf>.
- RICHART, F.E. ; WOODS, R.D.; HALL JR., J.R. Vibrations of Soils and Foundations, Prentice-Hall, INC., Englewood Cliffs, NJ, 1970.
- SANTOS, S.H.C., Fundações de Máquinas, Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Apostila, Escola Politécnica, Departamento de Estruturas, 2022.
- WOLF, J.P., Dynamic Soil-Structure Interaction, New Jersey, Prentice Hall, 1985.
- WOLF, J.P., Foundation Vibration Analysis Using Simple Physical Models, New Jersey, Prentice Hall, 1994.