

Métodos para Determinação dos Esforços Hiperestáticos de Protensão em uma Laje Cogumelo com Protensão Aderente

Thainá Pözl¹, Benjamin Ernani Diaz²

¹SEEL – Serviços Especiais de Engenharia / Engenharia / thainapolzl@poli.ufrj.br

²SEBED – Serviços de Engenharia Benjamin Ernani Diaz / Departamento Técnico / ernani.diaz@outlook.com

Resumo

A utilização de lajes em concreto protendido como solução estrutural é usual no país, especialmente no projeto de edificações com elevadas cargas variáveis. No entanto, não há muita clareza por parte dos projetistas quanto aos conceitos relativos aos esforços hiperestáticos de protensão em lajes e os métodos empregados para sua determinação. Sendo assim, neste trabalho são apresentados três métodos para o cálculo dos momentos hiperestáticos em lajes lisas ou com capitéis, que são análogos aos métodos comumente utilizados em vigas contínuas protendidas. As três metodologias podem ser definidas pelas seguintes características de análise: modelagem física dos cabos de protensão na estrutura de concreto por meio de elementos finitos de barras, substituição dos cabos por cargas equivalentes aplicadas à estrutura de concreto e simulação da ação da protensão por meio de deformações e curvaturas calculadas com os esforços isostáticos de protensão. O estudo é feito mediante a análise de um modelo em elementos finitos de uma laje cogumelo protendida com cordoalhas aderentes e geometria simplificada. O pavimento utilizado como exemplo possui quatro vãos em cada direção com comprimentos de 6,5 m e 8,0 m, para os vãos externos e internos, respectivamente. Todos os métodos forneceram resultados com boa precisão no que diz respeito à ordem de grandeza dos valores e ao comportamento dos diagramas de esforços.

Palavras-chave

Concreto Protendido; Esforços Hiperestáticos de Protensão; Lajes lisas; Lajes cogumelo; Análise.

Introdução

Uma das complexidades do projeto de lajes protendidas advém da necessidade de determinar os esforços hiperestáticos de protensão. Dessa forma, este trabalho pretende apresentar três métodos, usualmente aplicados ao caso de vigas contínuas em concreto protendido, para determinação dos esforços hiperestáticos em uma laje cogumelo com protensão aderente. De acordo com DIAZ (2019), os métodos podem ser definidos conforme apresentado a seguir.

- Método 1 (modelagem física dos cabos): neste caso, os cabos de protensão são representados fisicamente por barras lineares espaciais unidas à malha de elementos finitos que define a estrutura de concreto, sendo a última representada por meio de barras ou elementos de casca. A tensão imposta pela protensão é simulada com a aplicação de deformações nos cabos modelados, calculadas pela Lei de Hooke;
- Método 2 (cargas equivalentes de protensão): neste método, os cabos não são modelados e as cargas de protensão são aplicadas por meio de forças concentradas ou distribuídas calculadas em função do traçado dos cabos;
- Método 3 (deformações e curvaturas): os carregamentos da protensão isostática são aplicados por meio de deformações e curvaturas impostas ao modelo da estrutura de concreto. Assim como no segundo método, os cabos não são incluídos no modelo.

A metodologia a ser empregada consiste em definir, inicialmente, os esforços de protensão em vigas contínuas. O estudo dos esforços na viga protendida tem como objetivo esclarecer os conceitos necessários para o entendimento do problema principal do trabalho, uma vez que a viga é um elemento linear e, por essa razão, seu estudo é mais simples do que o da laje.

Posteriormente, serão apresentados os procedimentos a serem empregados em cada um dos três métodos para obtenção dos esforços hiperestáticos de protensão em lajes, com auxílio de um exemplo de uma laje cogumelo protendida. Toda a análise estrutural foi feita por um programa comercial de elementos finitos.

Definição dos esforços de protensão em vigas

É necessário definir os conceitos relativos aos esforços de protensão que são formados por duas parcelas: esforços isostáticos e esforços hiperestáticos de protensão. Para isso, foi considerado que o estado de tensões na viga gerado pela protensão possa ser definido somente pela força normal, momento fletor vertical e força cortante vertical. Entretanto, no caso geral, é preciso acrescentar o momento fletor e a força cortante horizontais, e o momento de torção.

Em uma estrutura externamente isostática, a ação da protensão induz esforços internos com resultante nula em cada seção transversal. Existe um estado de tensões autoequilibrado na estrutura, ou seja, as três componentes da resultante de tensões na seção de concreto representadas, no caso usual, pela força normal, força cortante e momento fletor isostáticos de protensão (N_{IP} , V_{IP} e M_{IP}) são anuladas pelas três componentes da resultante das forças nos cabos de protensão, que possuem os mesmos valores com sinais trocados ($-N_{IP}$, $-V_{IP}$ e $-M_{IP}$). Sendo assim, o tensionamento de estruturas externamente isostáticas não faz surgir reações de apoio e, como consequência, não são gerados esforços hiperestáticos no concreto, sendo apenas encontrados os esforços isostáticos.

No caso de uma estrutura hiperestática externamente, os vínculos da estrutura, ao impedir a livre deformação, produzem reações de apoio hiperestáticas que originam adicionalmente os esforços hiperestáticos de protensão (N_{HP} , V_{HP} e M_{HP}). De forma resumida, nas estruturas isostáticas externamente apenas atuam os esforços isostáticos de protensão, mas nas estruturas hiperestáticas são produzidos tanto os esforços isostáticos quanto os hiperestáticos, sendo os últimos utilizados na combinação de esforços para dimensionamento.

Desse modo, os esforços totais de protensão (N_{TP} , V_{TP} e M_{TP}) na seção de concreto podem ser definidos com as Equações 1, 2 e 3.

$$N_{TP} = N_{IP} + N_{HP} \quad (1)$$

$$M_{TP} = M_{IP} + M_{HP} \quad (2)$$

$$V_{TP} = V_{IP} + V_{HP} \quad (3)$$

À título de exemplo, a Figura 1 apresenta os diagramas de momentos fletores de protensão em uma viga contínua com cabo retilíneo. Neste caso, foram adotadas simplificações na análise, como a eliminação das deformações de cisalhamento e a adoção de carregamento constante no cabo.

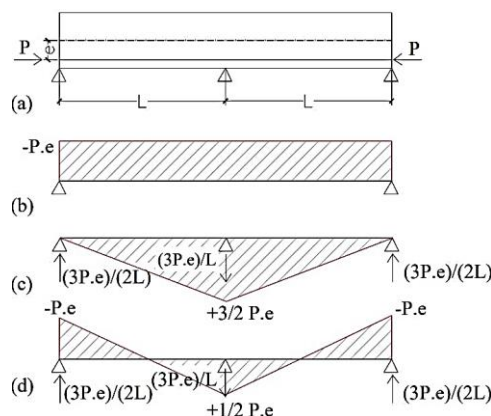


Figura 1 - Momentos de protensão em uma viga contínua. (a) Excentricidade do cabo em relação ao centroide. (b) Momento isostático. (c) Momento hiperestático (d) Momento total.

Resultados obtidos com cada método de análise nas vigas

Deve-se atentar quais são os esforços obtidos na análise com a utilização de cada um dos três métodos. No Método 1, em que os cabos são modelados como elementos físicos e carregados, haverá esforços resultantes aplicados separadamente nos elementos de concreto e dos cabos. Devido à pequena rigidez longitudinal dos cabos em relação à seção de concreto, os esforços hiperestáticos seguirão as equações 1, 2 e 3 de forma aproximada. Para fins de projeto usual, pode ser considerado que os esforços hiperestáticos de protensão sejam absorvidos totalmente na seção de concreto.

Neste método, o diagrama gerado pela análise do modelo hiperestático com concreto e cabos será o diagrama de esforços totais de protensão, sendo o diagrama de esforços hiperestáticos obtido por meio da subtração entre os esforços totais e os esforços isostáticos, sendo os últimos obtidos ao tornar a viga analisada isostática externamente, eliminando vínculos redundantes.

Além disso, os esforços hiperestáticos também podem ser calculados por meio das reações de apoio hiperestáticas. Neste caso, é necessário tornar a estrutura, originalmente hiperestática externamente, em uma estrutura especial isostática externamente e, por fim, aplicar as reações hiperestáticas como um carregamento.

Outra maneira de obter os esforços hiperestáticos no Método 1 é por meio de um corte seccional na viga atravessando toda a seção de concreto. Neste caso serão obtidos os esforços hiperestáticos exatos de protensão, solicitando o concreto e os cabos. No entanto, neste trabalho não é dado enfoque a este procedimento.

Para o Método 2, em que os cabos não são modelados e apenas o carregamento equivalente à protensão é aplicado, os diagramas de esforços da seção de concreto seguirão as Equações 1, 2 e 3 com exatidão. Ao final da análise da estrutura, também serão encontrados os esforços totais de protensão. Sendo assim, para obter os esforços hiperestáticos, pode-se recorrer aos procedimentos explicitados para o Método 1, como a subtração de diagramas de momentos de protensão ou a utilização das reações hiperestáticas como carregamento na estrutura. Cabe dizer que o carregamento equivalente pode ser calculado conforme expressões desenvolvidas por NAAMAN (1982) e apresentadas na publicação de EMERICK (2005).

No Método 3, os cabos também não são modelados, e o efeito da protensão é simulado por meio de deformações e curvaturas devidas aos esforços normais e momentos fletores isostáticos de protensão, respectivamente. As deformações longitudinais no centroide da seção (D_c) e as curvaturas nos elementos de concreto (C_c) a serem aplicadas ao modelo hiperestático original da viga são obtidas pelas Equações 4 e 5.

$$D_c = \frac{N_{IP}}{E_c \cdot A_c} \quad (4)$$

$$C_c = \frac{M_{IP}}{E_c \cdot I_c} \quad (5)$$

Sendo:

E_c : Módulo de elasticidade do concreto;

A_c : Área da seção de concreto;

I_c : Inércia da seção de concreto em relação ao centroide.

Ao contrário dos demais métodos, após a análise da estrutura hiperestática original com a aplicação das deformações e curvaturas, o Método 3 fornece diretamente os esforços hiperestáticos de protensão no concreto, sem necessidade de utilizar um procedimento adicional para separá-los.

Exemplo analisado – laje protendida com capitéis

Foram empregados os três métodos de análise descritos nos itens anteriores, comumente aplicados às vigas, ao caso de uma laje com capitéis e geometria regular. A Figura 2 e a Figura 3 mostram a planta do pavimento com a disposição dos cabos e um corte vertical da estrutura, respectivamente.

A laje tem espessura de 20 cm e os capitéis de 40 cm. Nos bordos da laje foram dispostas vigas com as dimensões 20 cm x 60 cm. O pavimento se apoia em pilares de 30 cm x 30 cm dispostos nos centros

dos capitéis e ao longo das vigas de extremidade. Foram utilizados elementos de casca para a modelagem da laje e das vigas de bordo, e elementos de barras para os pilares e para os cabos. Os cabos em aço CP190-RB com cordoalhas de 15,2 mm têm geometria parabólica com curvatura para cima na região central dos vãos e com curvatura para baixo na região dos apoios. Esses seguem trajetória em elevação formada por várias parábolas individualizadas com tangentes iguais nos pontos de contato. Na direção horizontal, os cabos foram concentrados de modo a facilitar a montagem. Pode-se consultar o trabalho de PÖLZL (2020) para mais informações.

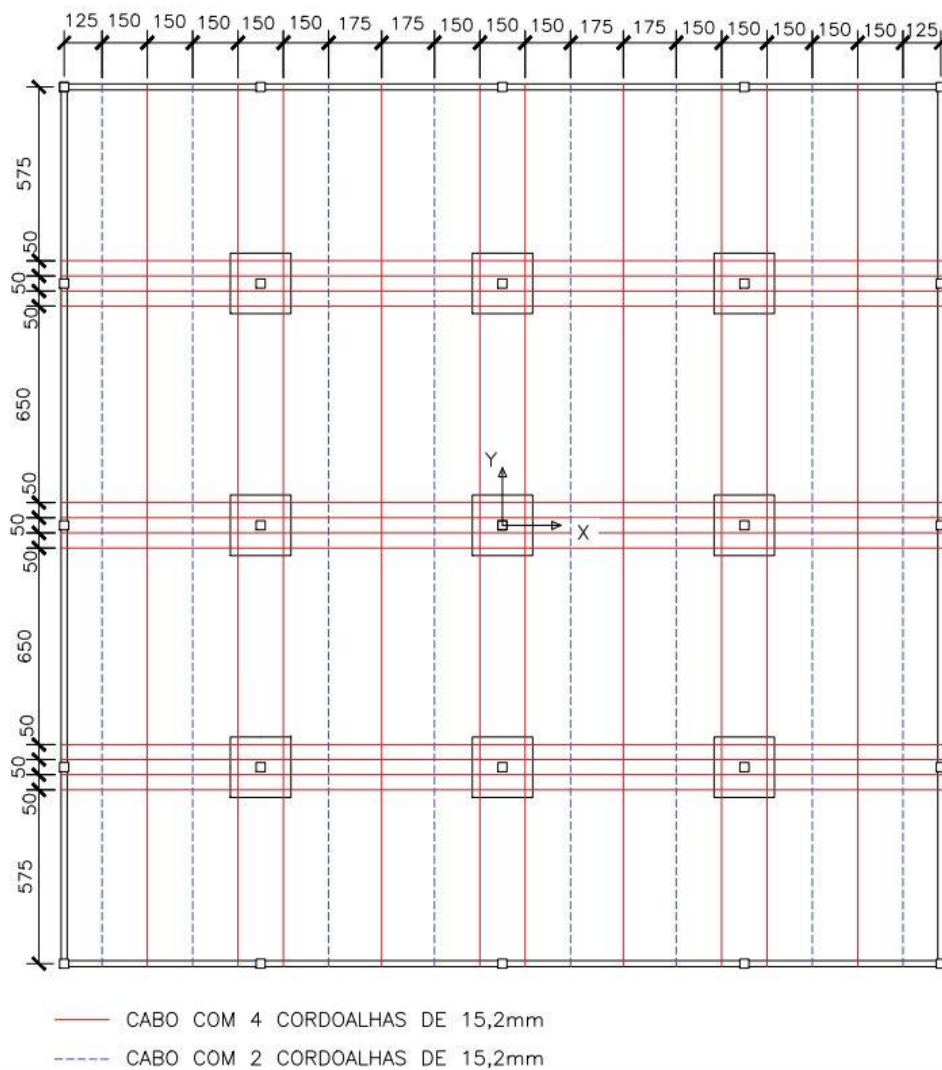


Figura 2 – Planta da laje com disposição dos cabos e com a definição do eixo global de referência (dimensões em cm).

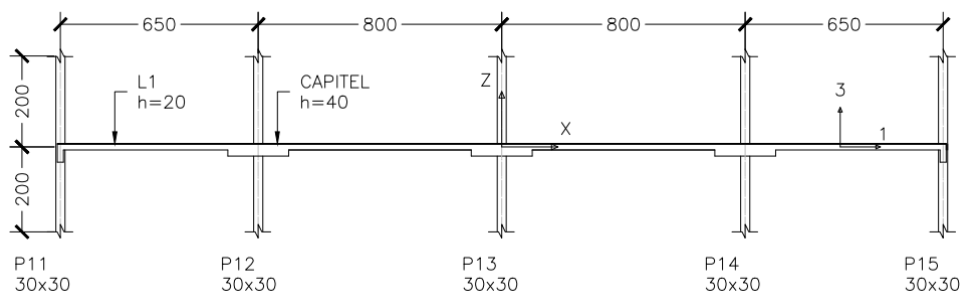


Figura 3 - Corte transversal da laje com eixos globais e locais de referência (dimensões em cm).

Aplicação dos três métodos de análise na laje

A laje utilizada como exemplo foi modelada com auxílio de um programa comercial de elementos finitos. O modelo do pavimento fixado nas extremidades dos pilares foi denominado $MOD_{inicial}$ (ver Figura 4). Este modelo representa a laje hiperestática externamente em sua forma original.

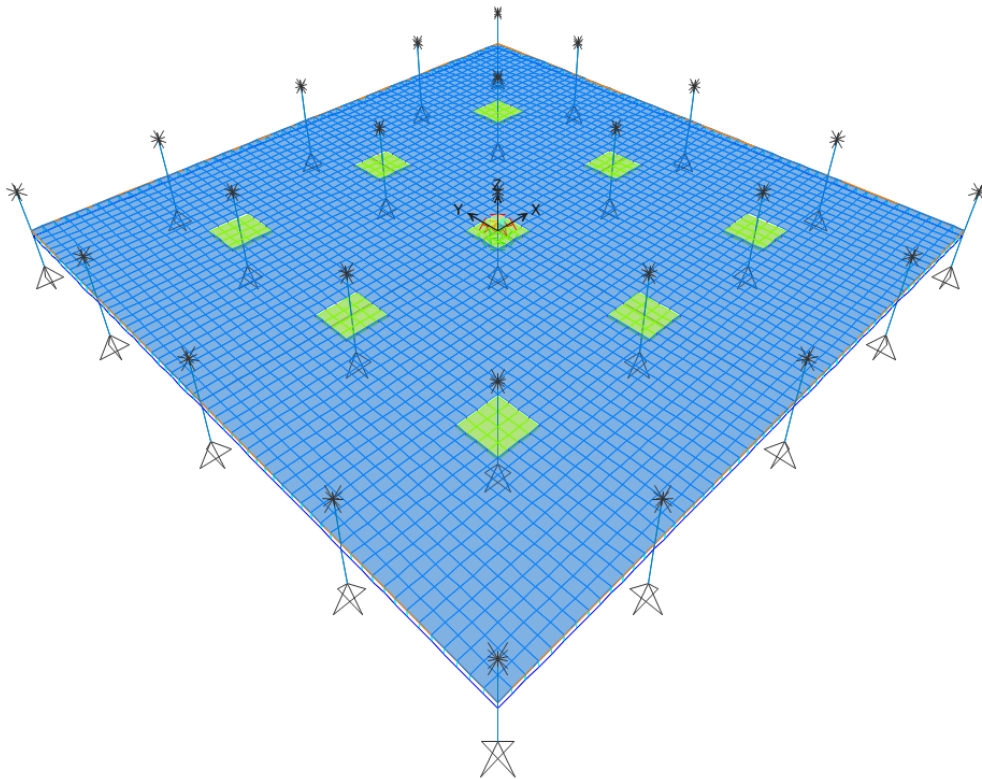


Figura 4 – $MOD_{inicial}$ - Modelo original da laje hiperestática.

Ao incluir os cabos de protensão carregados no modelo $MOD_{inicial}$, conforme previsto no Método 1, ou ao aplicar à laje os carregamentos equivalentes de protensão, de acordo com o Método 2, a análise da estrutura resultará nos esforços totais de protensão, sendo necessário realizar a separação dos esforços hiperestáticos e isostáticos. Com esse objetivo, foram criados dois procedimentos adicionais denominados de Procedimento A e Procedimento B.

No Procedimento A, os esforços hiperestáticos de protensão são obtidos por meio de um modelo específico externamente isostático, carregado com as reações de apoio determinadas no $MOD_{inicial}$. O modelo isostático, chamado de $MOD_{iso-reações}$, foi elaborado com a eliminação dos vínculos dos pilares nas suas duas extremidades e com a criação de um engastamento no ponto central da laje. O modelo solicitado pelas reações hiperestáticas é apresentado na Figura 5.

No Procedimento B, os esforços hiperestáticos são determinados com base nas Equações 1, 2 e 3 por diferença entre diagramas de esforços. Dos esforços totais de protensão obtidos no $MOD_{inicial}$ são subtraídos os esforços isostáticos de protensão. Com o objetivo de determinar os últimos, foi utilizado o modelo da laje isostática externamente engastada em seu ponto central e foi inserido o carregamento dos cabos conforme previsto nos Métodos 1 ou 2. Este modelo foi chamado de $MOD_{iso-cabos}$ (ver Figura 6).

No caso do Método 3, os esforços hiperestáticos são determinados diretamente com a análise do modelo original hiperestático da laje, $MOD_{inicial}$, carregado com as deformações e curvaturas calculadas com os esforços isostáticos de protensão. O item a seguir apresenta as equações empregadas neste método para o caso de uma laje.

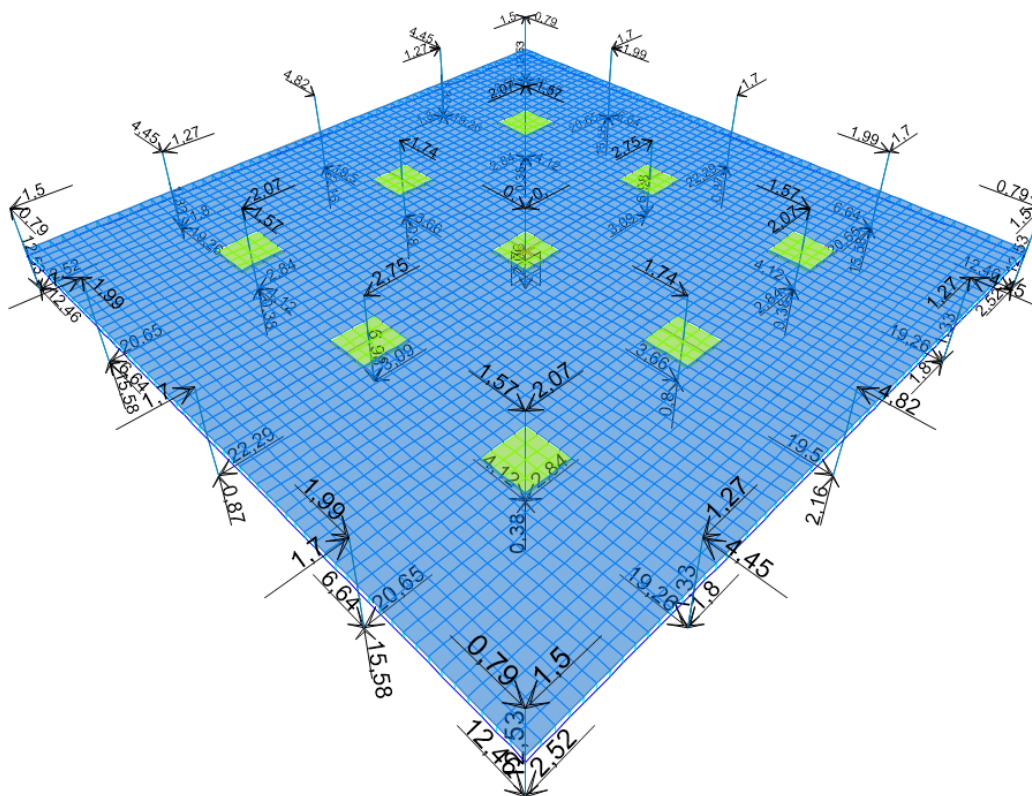


Figura 5 - $MOD_{iso-reações}$ - Modelo da laje isostática externamente com aplicação das reações hiperestáticas (exemplo das reações do método 1).

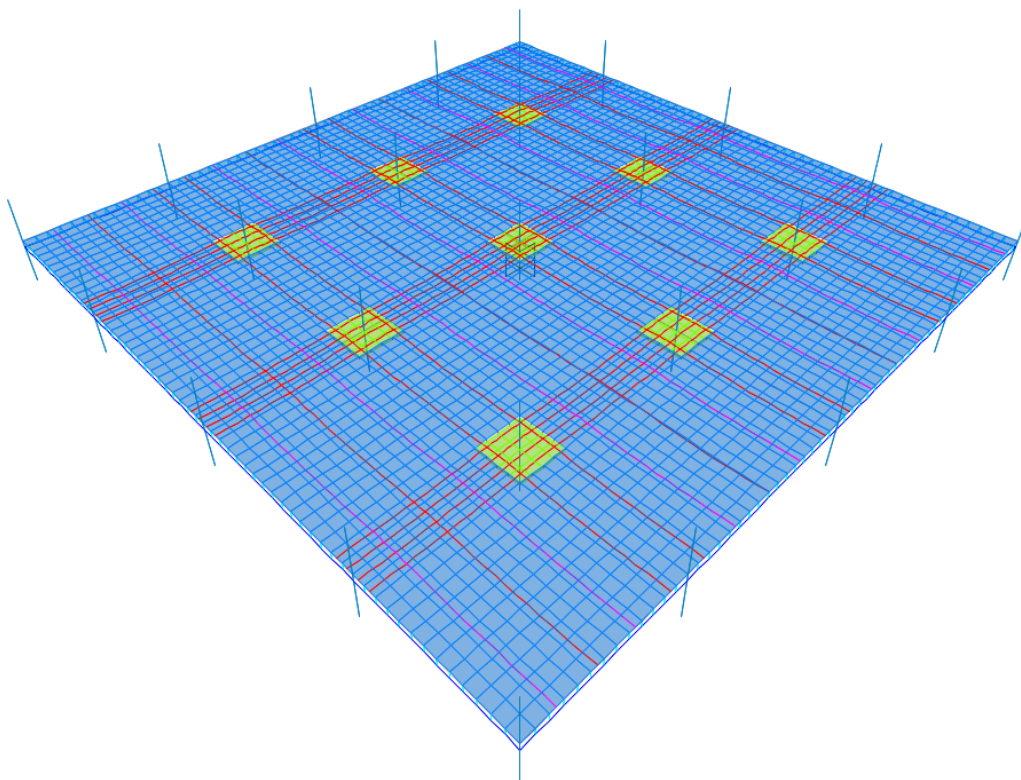


Figura 6 - $MOD_{iso-cabos}$ - Modelo da laje isostática externamente com aplicação do carregamento dos cabos – (exemplo do método 1).

A Tabela 1 mostra de forma resumida os diversos modelos utilizados no estudo e os resultados obtidos com cada carregamento.

Tabela 1 - Resumo dos modelos utilizados e suas características.

Modelo	Tipo	Métodos	Carregamento atuante	Esforços de protensão atuantes
MOD inicial	Hiperestático	1	Cabos físicos carregados	Totais
		2	Carregamento equivalente aos cabos	Totais
		3	Deformações e curvaturas	Hiperestáticos
MOD iso-reações	Isostático	1	Reações hiperestáticas de protensão	Hiperestáticos
		2	Reações hiperestáticas de protensão	Hiperestáticos
MOD iso-cabos	Isostático	1	Cabos físicos carregados	Isostáticos
		2	Carregamento equivalente aos cabos	Isostáticos

Cálculo das deformações e curvaturas em lajes

No Método 3 devem ser aplicadas as deformações e curvaturas nas direções locais 11, 22 e 12, calculadas com os esforços isostáticos, nos elementos de casca do modelo hiperestático, ou seja, as deformações e as curvaturas são calculadas com os esforços isostáticos obtidos no modelo *MOD_{iso-cabos}* e são aplicadas como carregamento no modelo hiperestático *MOD_{inicial}* que, por sua vez, terá como resultado de análise os esforços hiperestáticos de protensão. Para a aplicação do método, os elementos que compõem a laje protendida devem ser todos modelados como placa.

As deformações e curvaturas, induzidas pela protensão isostática aplicada pelos cabos, precisam ser determinadas por expressões baseadas na teoria das placas.

Para as placas, que são solicitadas por forças axiais unitárias n_{11} , n_{22} , n_{12} e momentos unitários m_{11} , m_{22} , m_{12} , as deformações e curvaturas longitudinais são calculadas pelas Equações 6 a 13, retiradas da publicação de GIRKMANN (1956).

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_1 - \mu\sigma_2) \quad (6)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_2 - \mu\sigma_1) \quad (7)$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{G} \cdot \tau_{12} \quad (8)$$

$$\kappa_{11} = \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{m_{11}}{1-\mu^2} - m_{22} \cdot \frac{\mu}{1-\mu^2} \right) \quad (9)$$

$$\kappa_{22} = \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{m_{22}}{1-\mu^2} - m_{11} \cdot \frac{\mu}{1-\mu^2} \right) \quad (10)$$

$$\kappa_{12} = \frac{m_{12}}{(1-\mu) \cdot K} \quad (11)$$

$$K = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1-\mu^2)} \quad (12)$$

No caso da utilização do Programa SAP2000, é importante que a Equação 11 seja substituída pela Equação 13:

$$\kappa_{12} = \frac{2m_{12}}{(1-\mu) \cdot K} \quad (13)$$

sendo:

ε_{11} e ε_{22} : deformações nas direções dos eixos 1 e 2;

σ_1 e σ_2 : tensões normais nas direções 1 e 2;

μ : coeficiente de Poisson;

E : módulo de elasticidade do concreto;

γ_{12} : deformação devido ao cisalhamento produzida pela força n_{12} ;

G : módulo de elasticidade transversal;

τ_{12} : componente da tensão cisalhante devido a força n_{12} ;

κ_{11} e κ_{22} : curvaturas nos planos perpendiculares às direções 2 e 1, respectivamente;

κ_{12} : curvatura devido ao momento de torção m_{12} ;

m_{11} e m_{22} : momentos fletores por unidade de comprimento com vetores perpendiculares às direções 1 e 2, respectivamente;

m_{12} : momento de torção por unidade de comprimento.

Comparações e resultados

No trabalho acadêmico de PÖLZL (2020) foram feitas comparações entre os três métodos propostos. Todos os métodos forneceram resultados com boa precisão no que diz respeito à ordem de grandeza dos valores e ao comportamento dos diagramas de esforços.

São mostrados nas Figuras 7 e 8, à título de exemplo, somente os diagramas de momentos fletores hiperestáticos de protensão, obtidos pelo Método 3, com as duas famílias de cabos atuando concomitantemente. No entanto, para o dimensionamento no Estado Limite Último (ELU), também há necessidade de levar em conta os demais esforços hiperestáticos de protensão nas duas direções.

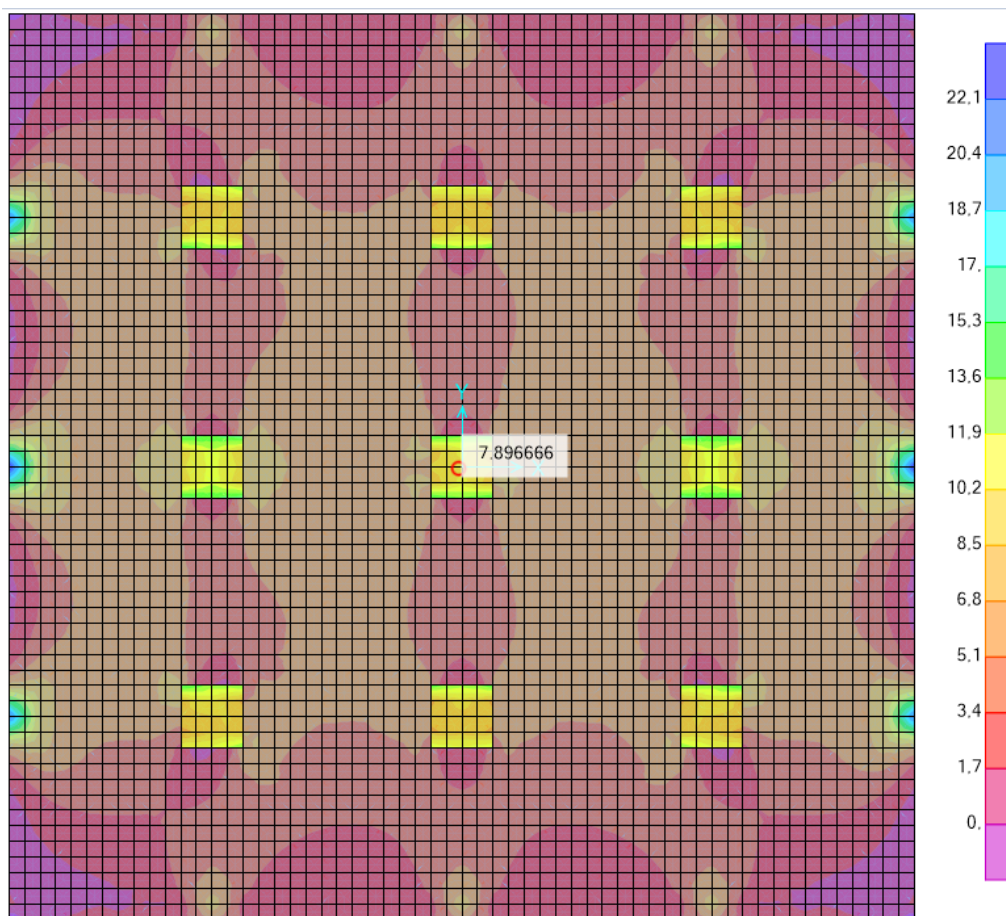


Figura 7 - Diagrama de momentos hiperestáticos de protensão em kNm/m na direção 1 (direção horizontal da figura - X).

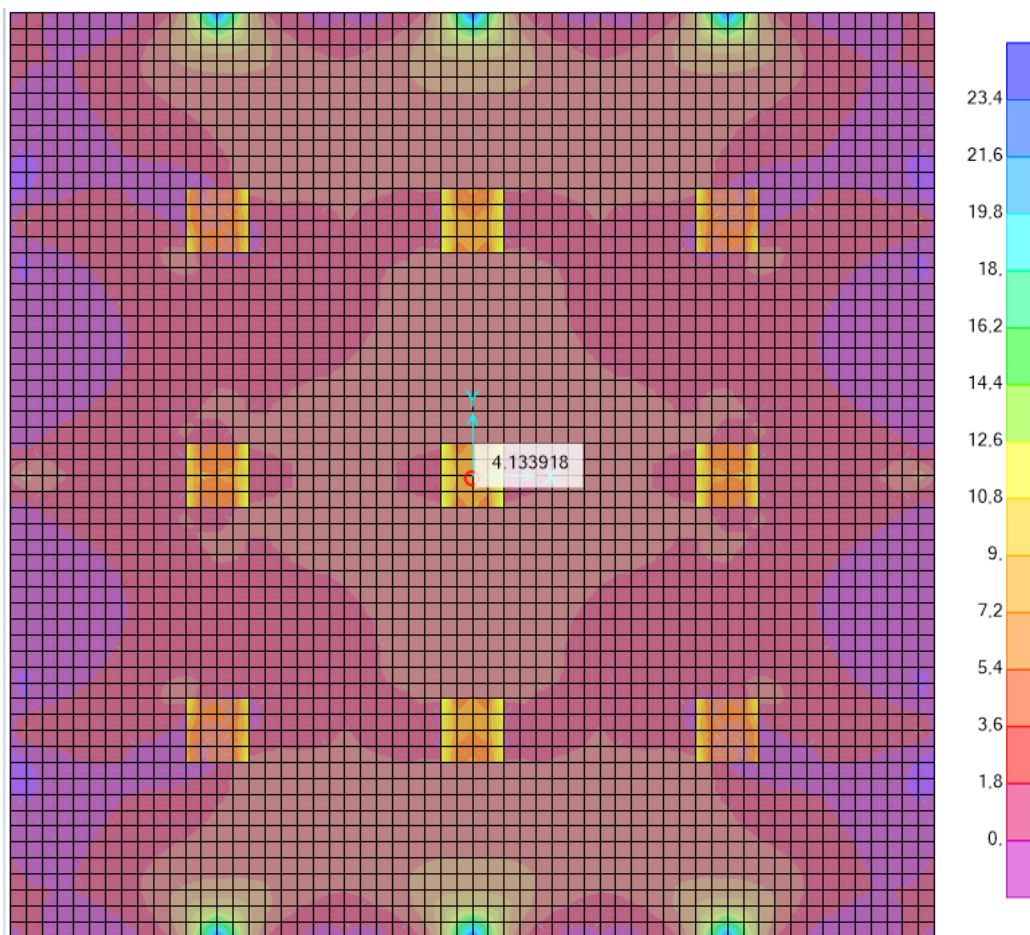


Figura 8 – Diagrama de momentos hiperestáticos de protensão em kNm/m na direção 2 (direção vertical da figura -Y).

Conclusões

Foram apresentados três métodos distintos para a determinação de esforços hiperestáticos de protensão em lajes lisas ou com capitéis. No primeiro, foi realizada a modelagem dos cabos na estrutura com elementos finitos. No segundo método, foi utilizado o conceito das cargas equivalentes para aplicação do carregamento dos cabos protendidos. Por fim, no terceiro método, o efeito das armaduras ativas foi inserido no modelo da estrutura por meio de deformações e curvaturas impostas calculadas com os esforços isostáticos de protensão.

Verificou-se que nas duas primeiras metodologias são determinados os momentos totais de protensão na estrutura hiperestática, sendo necessário utilizar procedimentos adicionais para a separação entre as parcelas isostática e hiperestática dos esforços. Por outro lado, na terceira metodologia, o esforço hiperestático é obtido diretamente na estrutura estaticamente indeterminada original.

Foi constatado no trabalho de PÖLZL (2020) que os resultados obtidos pelos três métodos são semelhantes entre si, tanto em relação à ordem de grandeza dos esforços quanto à configuração dos diagramas.

Além disso, comparando-se os métodos, foi possível verificar que no Método 1 as forças introduzidas pelos cabos são calculadas sem muita interferência do usuário. No Método 2, considerado o mais trabalhoso entre os três, há necessidade de determinar as forças aplicadas pelos cabos detalhadamente em cada elemento de área, o que implica em cálculos paralelos adicionais custosos. Por fim, o Método 3 exigiu processamentos prévios adicionais, já que os dados de entrada do modelo hiperestático original são obtidos indiretamente a partir dos esforços isostáticos adquiridos de um modelo isostático separado. No entanto, os resultados finais, que são os esforços hiperestáticos, são obtidos diretamente, sem a necessidade de utilizar os Procedimentos A e B.

Referências

- DIAZ, B. E. Estruturas Protendidas: notas de aula e planilhas de dimensionamento. Rio de Janeiro, Escola Politécnica da UFRJ, 2019.
- EMERICK, A. A. Projeto e Execução de Lajes Protendidas. Rio de Janeiro, Editora Interciência, 2005.
- GIRKMANN, K. Flächentragwerke. Viena, Springer-Verlag, 1956.
- NAAMAN, A. E. Prestressed Concrete Analysis and Design. New York, McGraw-Hill, 1982.
- PÖLZL, T. Métodos para Determinação dos Esforços Hiperestáticos de Protensão em uma Laje Cogumelo com Protensão Aderente. Projeto Final do Curso de Engenharia Civil. Rio de Janeiro, Escola Politécnica da UFRJ, 2020.