

## Interação solo-estrutura – Uma contribuição aos estudos para determinação do coeficiente de rigidez horizontal

Henrique Dinis<sup>1</sup>, Alfonso Pappalardo<sup>2</sup>, Kamila Rodrigues Cassares Seko<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Universidade Presbiteriana Mackenzie / Engenharia Civil / Estruturas / henrique.dinis@mackenzie.br

<sup>2</sup> Universidade Presbiteriana Mackenzie / Engenharia Civil / Estruturas / alfonso.pappalardo@mackenzie.br

<sup>3</sup> Universidade Presbiteriana Mackenzie / Engenharia Civil / Estruturas / kamila.seko@mackenzie.br

### Resumo

Este trabalho aborda questões relacionadas aos modelos estruturais que consideram a interação solo-estrutura. Trata-se de um problema complexo, pois requer uma análise interativa tridimensional, na qual o solo e a estrutura são idealizados como um sistema único, modelo típico para o uso de métodos numéricos, como exemplo, o Método dos Elementos Finitos. Emil Winkler (1867) apresentou um modelo simplificado de cálculo ainda hoje utilizado em projetos estruturais, devido sua simplicidade. Consiste em considerar uma série de elementos de rigidez representando o solo, discretos ao longo do elemento estrutural, que trabalham independentes uns dos outros e com resposta linear, representados por um módulo de rigidez elástico  $K_s$  (kN/m), proporcional ao coeficiente de recalque  $k_i$  (kN/m<sup>3</sup>) e à área de contato com o solo  $A_c$  (m<sup>2</sup>) de cada elemento submetido ao referido recalque. Ao elemento de rigidez, dá-se a denominação de mola. Por outro lado, sabe-se por inúmeras pesquisas efetuadas sobre o tema, que o valor do coeficiente de recalque  $K_i$  depende de vários fatores, como a forma e dimensão da área de contato com o solo, profundidade no meio solo, propriedades do solo, como também, se o recalque é vertical  $K_{iv}$  ou horizontal  $K_{ih}$ . Este trabalho apresenta uma contribuição aos estudos da avaliação do coeficiente de rigidez horizontal  $K_{ih}$ , a partir dos fatores citados acima, no entanto, considerando que para condições específicas de envoltória da linha elástica ocorrem respostas diferenciadas para o comportamento das molas assim avaliadas, refletindo-se em sua rigidez, função do espraçamento das tensões e cisalhamento desenvolvidos no solo. Os estudos foram realizados por meio de análises bidimensionais, representando um sistema estaca-solo, utilizando-se o programa computacional Ansys. Como resultado, apresenta-se contribuições para melhor avaliar o nível de discretização e determinação de molas elásticas para o solo, em sistemas unidimensionais, aproximando-se melhor a valores que se valem de análises bidimensionais.

### Palavras-chave

Interação solo-estrutura; Coeficiente de Rigidez Horizontal; Modelo de molas solo-estrutura.

### Introdução

O uso de estacas como elementos de fundação está relacionado à ocorrência de baixas resistências dos solos em consideráveis profundidades ou à ausência de auto estabilidade após escavação, fazendo as estacas, neste caso, o papel de contenção. As estacas, quando carregadas, impõe deformações ao meio solo e interagem com o mesmo, seja verticalmente como horizontalmente, a depender da orientação da solicitação.

A análise da interação solo-estrutura é primordial na Engenharia Geotécnica. Destaca-se que a ABNT(2019), na NBR6122:2019, prevê que sejam realizadas análises considerando a interação fundação-estrutura, tendo em conta os efeitos da deformabilidade das fundações na distribuição de esforços da estrutura. Deve-se, desta forma, avaliar a capacidade de suporte do solo para determinada

fundação, tendo em conta a forma e rigidez da mesma, a maneira com que o esforço será transmitido, se deforma permanente, acidental, ao longo do tempo, como também a magnitude dos deslocamentos decorrentes de inúmeras combinações de carregamentos.

O conceito do coeficiente de rigidez horizontal foi introduzido pelo Emil Winkler em 1867 e empregado por Zimmermann já em 1888, com o intuito de calcular as tensões ao longo do comprimento dos trilhos de linhas férreas apoiados sobre lastros. Durante as décadas que se seguiram, a teoria foi extrapolada para determinação de tensões em fundações consideradas flexíveis. Como exemplo, mais modernamente, têm-se casos caracterizados por sapatas corridas e pavimentos de concreto submetidos a carregamentos gerados pelas rodas dos veículos (TERZAGHI, 1955).

O coeficiente de rigidez horizontal do solo  $k_h$  pode ser definido, genericamente, como o quociente entre a tensão distribuída na área de contato entre a estrutura e o solo, e o deslocamento gerado pela transferência de esforços,  $\rho_y$ :

$$kh = \sigma / \rho_y \quad (1)$$

Diferentemente do coeficiente de rigidez vertical, na horizontal, os deslocamentos sofrem influência da ausência de confinamento junto à superfície do solo, como também, em relação direta, das propriedades dos solos ao longo da profundidade e sua rigidez.

Segundo Karl von Terzaghi (1955), o coeficiente de rigidez horizontal pode ser obtido simplistamente através do coeficiente de rigidez vertical, por meio da seguinte equação:

$$k_h = k_v \times \frac{z}{B} \quad (2)$$

onde  $k_v$  é o coeficiente de rigidez vertical,  $z$  consiste na profundidade e  $B$  é a dimensão da estaca que está submetida a tensão.

A partir da Solução de Boussinesq, proposta em 1885, para o estudo da distribuição de tensões com a profundidade decorrente de uma carga aplicada na superfície do solo, pode-se obter uma expressão para coeficiente de rigidez horizontal:

$$k_h = \frac{E_s I}{(1 - \nu^2)} \times \frac{z}{B} \quad (3)$$

sendo  $E_s$  o módulo de elasticidade do solo,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson, e  $I$  é o fator de influência em relação ao tamanho e rigidez da fundação (OTÁLVARO, 2009).

Verifica-se por esta expressão, que o coeficiente de rigidez horizontal se refere ao deslocamento específico relativo à uma unidade de tensão normal, que varia diretamente ao tamanho e rigidez da fundação e profundidade do elemento solo em questão e, inversamente proporcional à largura da estaca  $B$ . Com relação à profundidade  $z$ , refere-se em grande parte ao comportamento do próprio solo em função de sua profundidade, especialmente em razão do confinamento. Relativamente às propriedades do solo, alega-se este comportamento aos solos granulares. Com relação à largura  $B$ , refere-se à interferência do espreadimento das tensões no plano horizontal em razão da largura da estaca.

Maurice Anthony Biot (1937), propôs uma expressão para o cálculo do coeficiente de rigidez vertical. Esta foi adaptada para a obtenção do coeficiente de rigidez horizontal conforme apresentado a seguir,

$$k_h = \left\{ \frac{0,65 E_s}{(1 - \nu^2)} \left[ \frac{B^4 E_s}{(1 - \nu^2) EI} \right]^{0,108} \right\} \times \frac{z}{B} \quad (4)$$

onde  $EI$  é a rigidez da estaca.

Por esta expressão, diferencia-se o coeficiente de rigidez horizontal do vertical segundo uma proporção de 0,65, propondo-se ainda uma definição bem específica da influência do fator  $I$  na ponderação do valor do coeficiente de rigidez horizontal, quando comparada à expressão proposta por Joseph Valentin Boussinesq, em 1885.

Segundo Otálvaro e Nanclares (2009), uma expressão similar foi proposta por Aleksandar Sedmak Vesic, em 1961.

$$k_h = \left[ \frac{0,65E_s}{(1-\nu^2)} \sqrt[12]{\frac{B^4E_s}{EI}} \right] \times \frac{z}{B} \quad (5)$$

Por esta formulação, fica clara a influência da largura e rigidez da estaca no valor do coeficiente de rigidez do solo, tendo como referencial, no termo do fator corretivo evidenciado e isolado em Raiz, o valor do diâmetro e a flexibilidade da estaca, diretamente proporcional.

De forma geral o coeficiente de rigidez horizontal do solo é de difícil mensuração, dependendo de inúmeros fatores e não somente das características da natureza do solo, o que faz com que as formulações que têm como base a teoria da elasticidade têm unicamente caráter interpretativo e servem como base para estudos mais específicos diante de um maior número de variáveis. O problema se torna mais complexo à medida que se leva em conta diversos fatores: como a magnitude e duração do carregamento, que pode conduzir a um problema não linear; do tipo de solicitação aplicada (estática, dinâmica, cíclica, etc), que podem levar a uma interpretação do comportamento do modelo não real, por exemplo, para os solos que apresentam baixa recuperação elástica; do formato e dimensões da estaca a ser estudada, que interfere no espriamento das tensões e conseqüentemente na rigidez do modelo estaca-solo, como já identificado nestas propostas de formulação.

Ressalta-se, de forma geral, que o solo apresenta um comportamento não linear, devendo-se em análises específicas, em que a interação solo-estrutura é preponderante para a avaliação dos esforços nas estruturas, adotar algum controle na relação tensão-deformação do solo, com hipóteses de fluência, ou mesmo de plastificação.

### **Resolução de modelos estaca - solo**

As equações diferenciais da linha elástica em modelos estaca-solo, para a determinação dos deslocamentos em função dos carregamentos aplicados, são válidas para uma estaca carregada lateralmente, diferenciando-se do caso de uma viga, pelo acréscimo do termo  $m_h y$ :

$$EI \frac{d^4 y}{dz^4} + m_h y = 0 \quad (6)$$

sendo:

$m_h$ : módulo de reação horizontal

Fundamentalmente, o coeficiente de rigidez horizontal  $k_h$  pode ser definido como o quociente entre a reação aplicada pelo solo à estaca, no caso referindo-se à tensão, e o deslocamento ocorrido, variando ponto a ponto ao longo da profundidade. Verifica-se assim, para o caso particular caracterizado pela condição de que na largura da estaca não ocorrem deformações diferenciais, do que resulta tensão constante ao longo da projeção da largura. Alonso (2012) refere-se à definição do módulo de reação horizontal  $m_h$ , como sendo o produto entre coeficiente de rigidez horizontal e a largura/diâmetro da estaca, levando o problema a uma condição unidirecional na integração da linha elástica da estaca.

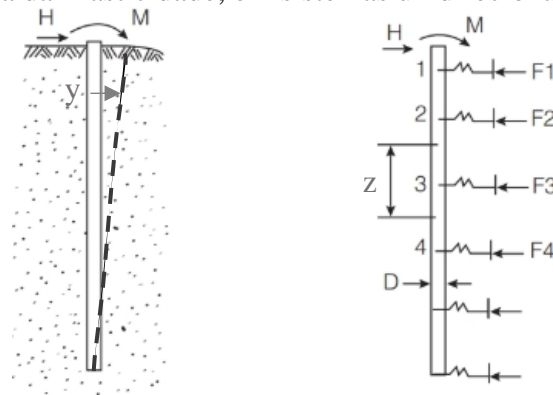
Destaca-se aqui que as cargas aplicadas em uma estaca carregada lateralmente não são centradas, como tão pouco sua rigidez é tratada como infinita, mesmo que muito maior que a do solo, fazendo com que o problema de distribuição de tensões no solo de uma estaca nestas condições assume uma complexidade bem maior que para os casos corriqueiros de distribuição vertical de carregamentos, mesmo sendo as fundações flexíveis.

Há inúmeros modelos de solução propostos na literatura para este problema proposto e estes têm sido gerados por meio de casos práticos, onde em sua maioria os solos são considerados homogêneos (HIRAI, 2012). Destaca-se que a consideração de homogeneidade é uma das hipóteses simplificadoras de muitos modelos.

Emil Winkler (1867) foi o primeiro a conceber um modelo simplificador para representar o comportamento do solo, idealizado por um conjunto de molas lineares que trabalham de forma independente umas das outras. Visou inicialmente dar respostas a aplicações a sistemas que

consideram unicamente deslocamentos verticais, sendo baseado na hipótese simplificadora de que o deslocamento de um elemento do solo de apoio de uma viga carregada é independente do deslocamento de elementos adjacentes. Por ter sido precursor desta metodologia de análise, é comum a denominação de Modelo de Hipótese de Winkler. A partir desta hipótese simplificadora, pode-se substituir o solo por uma série de molas independentes umas das outras que impõem um comportamento isolado dado por curvas de reação x deslocamento, obedecendo a relação de proporcionalidade  $\sigma = kv.\rho$ , onde as pressões de contato  $\sigma$  são proporcionais aos deslocamentos  $\rho$ , tendo como coeficiente de proporcionalidade o coeficiente de rigidez do solo, no caso vertical,  $kv$ . No caso de não ocorrer a linearidade na resposta do solo ao carregamento, pode-se recorrer à implementação do método com algoritmos não lineares, representados por curvas específicas p-y, características a cada solo, assumidas segundo suas propriedades, como apresentam Velloso e Lopes (2011)

Ressalta-se, segundo Alonso (2012), que apesar deste modelo não representar fisicamente o problema de maneira fiel, este tem tido grande emprego no estudo dos deslocamentos e esforços em estacas carregadas lateralmente, com aplicação por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF) ou soluções com base na Teoria da Elasticidade, em sistemas unidirecionais.



**Figura 1. Esquemático do Modelo de Winkler aplicado ao problema a ser solucionado.**  
**Fonte: Adaptado de Alonso (2012, p.62)**

A consideração simplificadora de comportamento independente na deformação das molas significa estar desprezando a resistência ao cisalhamento do meio solo no entorno que discretiza cada mola, o que faz com que não interajam umas com as outras. Ao se desconsiderar esta capacidade de rigidez do solo, se está na verdade, desprezando o efeito de espraçamento das tensões no meio solo, condicionando o problema à uma propagação linear de tensões, do que resulta na subavaliação das rigidezes horizontais do solo. No entanto, pela literatura, verifica-se que em grande parte os coeficientes de rigidez são obtidos por ensaios de placa, que medem a deformabilidade por compressibilidade do solo, mas que intrinsecamente, captam o efeito do espraçamento das tensões nas laterais da placa.

Assim, também, no modelo de molas discretas e independentes, está se desconsiderando a rigidez flexional da mola, ou seja, do elemento solo que a constitui, já que as molas estariam respondendo unicamente à deformações axiais e não às deformações angulares da deformada da linha elástica. No caso da adoção de um modelo em que se considere a rigidez aos efeitos rotacionais, isto traria uma maior aproximação ao resultado do efeito de rigidez do solo. No entanto, na prática, a simples discretização das molas em segmentos de projeção vertical menores que 1,0 m já minimizam esta distorção, tornando-se praticamente irrelevante para segmentos menores que 0,5 m. Esta distorção pode também ser compensada por uma majoração na adoção de valores para o coeficiente de rigidez horizontal, o que pode levar a resultados mais condizentes aos constatados em casos reais.

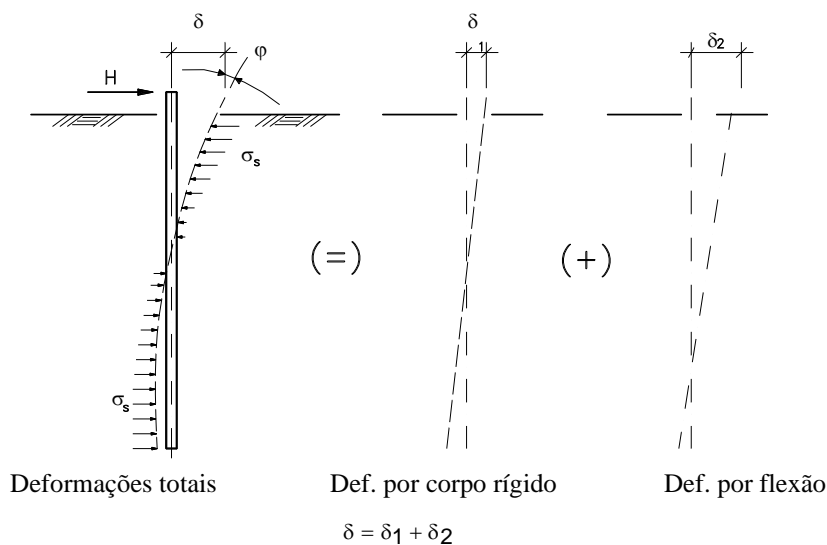
A despeito do Modelo de Winkler ter sido inicialmente elaborado para deslocamentos verticais, posteriormente ganhou grande aplicação em problemas que consideram a interação solo-estrutura para deslocamentos horizontais.

Para a estimativa do valor do coeficiente de rigidez  $K_i$ , a partir de aproximações numéricas feitas com base na teoria da elasticidade, ocorrem algumas dificuldades de cunho prático. Por exemplo, para o coeficiente vertical  $K_v$ , a estratificação do solo ao longo da profundidade pode trazer grandes dificuldades para que se fixe um valor de projeto. Os recalques que consideram o meio solo que tenham resistência aumentando com a profundidade demandam análises que considerem integrações das relações  $\sigma_v(z,y) \times E(z)$  para camadas da profundidade de um bulbo de isobáricas. Em situações mais extremas para esta situação, encontram-se substratos constituídos de camadas variadas de solos de propriedades distintas.

O conceito de rigidez do solo, ao ser levado para o plano horizontal, considerando que grande parte dos problemas de recalques horizontais referem-se às estacas, mostra-se adequado às análises que consideram o modelo de molas espaçadas ao longo da profundidade, trabalhando direcionadas na horizontal, com valores que já consideram as propriedades dos solos atravessados pela estaca. No entanto, as estacas, seja por sua grande flexibilidade, como por apresentar deslocamentos não só translacionais, como é o caso das fundações diretas, mas também, os rotacionais, devido sua flexibilidade, na busca do equilíbrio *forças x reações* do solo, exigiriam nas análises a consideração dos efeitos de cisalhamento do solo. O Modelo de Winkler desconsidera tais efeitos do comportamento do solo, mas tão somente, sua compressibilidade. A desconsideração dos efeitos de cisalhamento leva a resultados conservativos quanto à deformabilidade das estruturas, relativamente a carregamentos aplicados, porém, desfavoráveis, por exemplo, em análises de esforços nos elementos estruturais causados por contrações/dilatações do tabuleiro de pontes com estruturas aperticadas.

Assim, a resistência ao cisalhamento tem um papel fundamental no espriamento das tensões no meio solo. Em especial, no caso de uma estaca, que apresenta deslocamentos translacionais e rotacionais, confere ao solo maior rigidez, minimizando os deslocamentos  $\rho_y$  ao longo da linha elástica da estaca, em seu efeito estaca-solo.

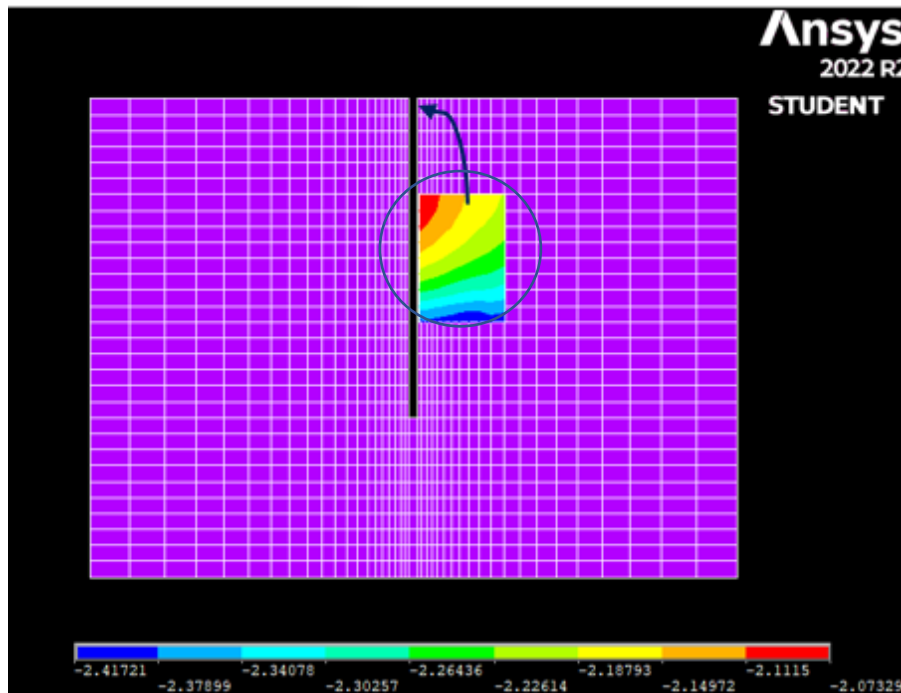
No caso de um deslocamento translacional da estaca, paralelo ao seu próprio eixo, por exemplo, na análise estrutural de uma contenção considerada muito rígida relativamente à rigidez do solo, desconsiderando o espriamento das tensões no solo abaixo do pé da estaca, a rigidez do solo a considerar, unicamente, seria sua compressibilidade, modelo este que corresponde ao de Winkler. Nesta situação, para um deslocamento imposto, por exemplo, no topo da estaca, a reação do solo seria menor que para o caso da mesma estar livre para os movimentos translacionais e rotacionais, quando contribuem para a rigidez do solo, a mobilização da resistência ao cisalhamento. Ainda, para uma estaca flexível, as rotações angulares seriam variáveis, tendo em conta a deformada da linha elástica. Ver Figura 2.



**Figura 2. Esquemático das deformações da LE de um caso típico do modelo estaca – solo.**  
**Fonte: Dinis (2022, pg129)**

## Método

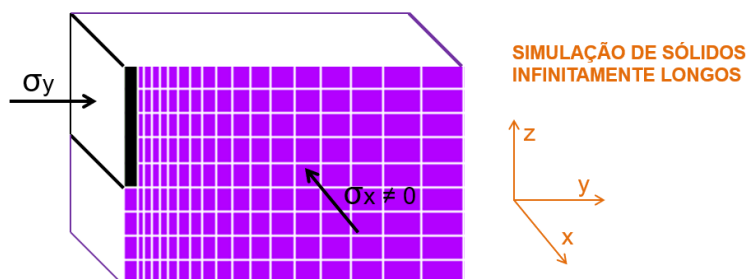
Para estudar o comportamento do meio solo diante de um problema estaca-solo, com a estaca carregada lateralmente, elaborou-se um modelo plano para processamento, pelo MEF, utilizando o programa Ansys, considerando unicamente uma estaca, livre de vinculação, em contato com uma malha de elementos representando o solo. Para simular o lado com deslocamentos negativos, desvinculou-se, nesta face, o solo da face da estaca, mas manteve-se o meio solo ativo abaixo da estaca, para captar as interferências de propagações das tensões pelo efeito de espraiamento. As larguras adotadas para a malha, à direita e esquerda da estaca foi de 10,0 m. O comprimento da estaca, de 10,0 m e a profundidade da malha abaixo da estaca, de 5,0 m. Ver Figura 3.



**Figura 3. Representação da malha de modelagem utilizada pelo MLF.**

**Fonte: Acervo dos autores (2022)**

Para simular o descolamento do solo em contato com a parede, evitando assim conturbações nas tensões nos elementos junto à parede devido a deformada da Linha Elástica, criou-se elementos de contato, com vinculação admitindo-se liberdade no contato do solo com a parede na direção vertical. Para os elementos de fronteira adotou-se vínculos sem liberdades de deslocamento nos limites da malha em seu plano. Para simular o confinamento do solo na direção transversal ao plano de estudo adotou-se Estado Plano de Deformações com largura da estaca (parede) infinitamente longa confinada lateralmente (em x), para captura do confinamento lateral dos elementos solicitados por compressão (em y). Ver Figura 4.



**Figura 4. Representação da modelagem da malha utilizada para processamento em MLF.**

**Fonte: Adaptado de Tamoio (2015)**

## PARÂMETROS DOS MATERIAIS

$E^{est} = 20000000$  kPa (modulo de elasticidade da estaca)

$n = 0.2$  (coeficiente de Poisson da estaca)

$E^{solo} = 50000$  kPa (modulo de elasticidade do solo)

$a = 0.25$  (coeficiente de Poisson do solo)

Efetuuou-se dois processamentos, ambos prevendo um deslocamento horizontal imposto no topo da estaca, de mesma magnitude para ambos os casos, porém, no primeiro, restringiu-se a liberdade rotacional da estaca, admitindo somente deslocamentos translacionais e, no segundo, admitiu-se liberdade unicamente para deslocamentos rotacionais, rotulando-se o pé da estaca. Após o processamento, em ambos os casos, mediu-se no primeiro elemento solo, junto à superfície, a reação por tensão em y do elemento solo contra a estaca.

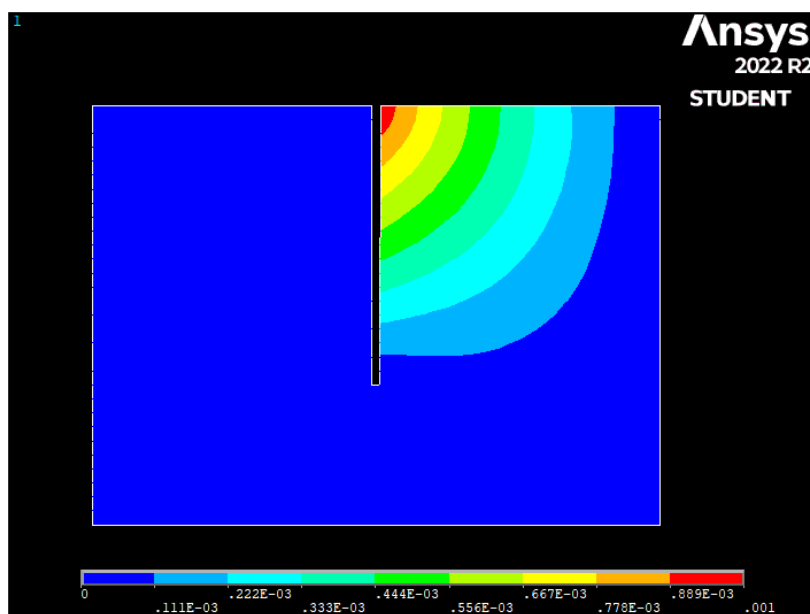
## Resultados

O processamento do modelo descrito foi efetuado considerando as duas situações descritas, independentes, uma da outra. Para ambos os casos foi lançado um deslocamento prescrito de 1 mm no topo da parede.

- Para o caso de *estaca com liberdade rotacional*, obteve-se no elemento de solo junto à superfície, tensão de 10,0 kPa.

Aplicando-se a relação:

Para  $y = 1$  mm e  $\sigma = 10,0$  kPa, caso da parede com liberdade rotacional, verifica-se que o coeficiente de rigidez horizontal que teria gerado esta tensão seria de 10.000 kN/m<sup>3</sup>. Ver Figura 5.

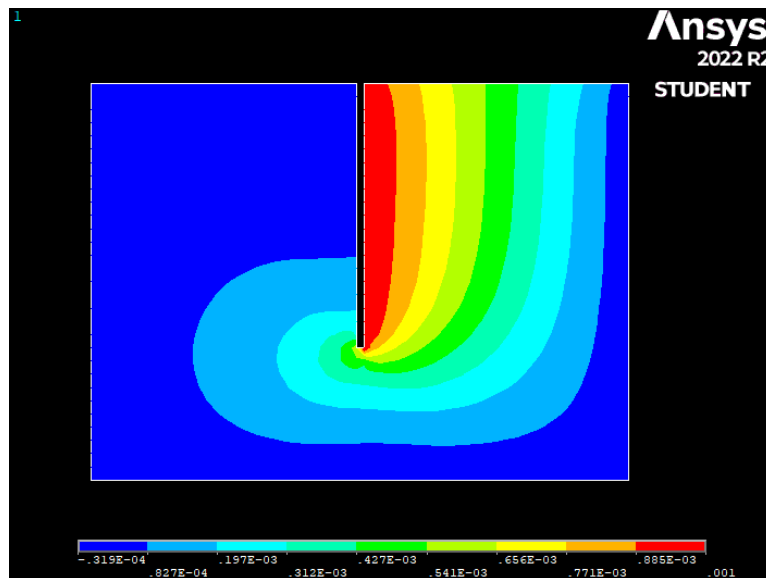


**Figura 5. Resultado do processamento para deformação em caso de liberdade rotacional imposta.**

**Fonte: Acervo dos autores (2022)**

Já para o caso de *estaca com liberdade translacional*, a tensão obtida foi de 6,0 kPa.

Para  $y = 1,0$  mm e  $\sigma = 6$  kN/ m<sup>3</sup>, caso da parede com deformação translacional imposta, o coeficiente de rigidez horizontal, que teria causado esta tensão, seria de 6.000 kN/m<sup>3</sup>. Ver Figura 6.



**Figura 5. Resultado do processamento para deformação imposta em caso de liberdade translacional imposta.**

**Fonte: Acervo dos autores (2022)**

Verifica-se que para a mesma malha e mesma deformação horizontal de um elemento solo, obtiveram-se diferentes resultados para  $K_h$ , considerando os dois casos de deslocamento da estaca.

## Conclusões

A mensuração do coeficiente de rigidez horizontal, ou de recalque horizontal, como também é chamado, exige a consideração de inúmeros fatores, não somente aqueles que se referem às propriedades dos solos, os fatores de forma, os relacionados à profundidade da camada de solo em análise, mas também, ao comportamento estaca-solo mediante as solicitações impostas para cada caso. Verificou-se, com o trabalho, que o coeficiente de rigidez horizontal trata-se de uma variável do problema estaca-solo, dependendo não só dos parâmetros impostos, mas também do próprio comportamento da estaca em meio ao solo, quando solicitada. Tais condicionantes fazem com que o coeficiente de rigidez horizontal deva ser tratado, não como um parâmetro do problema, mas sim como uma variável, impondo-se reservas de segurança quanto à relatividade em sua mensuração.

Como visto, a mensuração do coeficiente de rigidez horizontal  $k_h$ , na prática, é estabelecida na maior parte dos casos, por uma relação de proporção ao coeficiente de rigidez vertical  $k_v$ . Este, por sua vez, tem sido parametrizado por meio de ensaios de placa ou de dados obtidos de provas de carga em fundações rasas. Este tipo de avaliação corresponde a deslocamentos translacionais, especificamente, não se considerando o efeito de condições impostas para deslocamentos rotacionais. Assim, os dados utilizados para sua mensuração são conservativos, no sentido da avaliação de seu valor absoluto, a se considerar, como mostrado neste trabalho, pelo resultado dos processamentos dos modelos pelo Método dos Elementos Finitos – MEF, para os casos de deformações translacionais ou rotacionais impostas.

No entanto, como conclusão deste trabalho, há que se colocar a relatividade da questão ao se tratar de análises da segurança estrutural. Se para a maioria dos casos, adotar-se um valor para  $k_h$  conservativo, no tocante ao seu menor valor absoluto, leva à uma maior solicitação da estaca à flexão, estando assim, a favor da segurança, existe, no entanto, uma infinidade de casos em que para um menor valor para  $k_h$ , pode a estrutura ser solicitada a menores esforços à flexão, como exemplo, as que têm como solicitação principal, a contração do vigamento em estruturas hiperestáticas. Exemplificando, em pilares ou estacas de fundação de uma ponte de grande comprimento, haveria um relaxamento dos esforços de flexão se adotados valores para  $k_h$  conservativos. Em suma, deve-se



proceder, ao se adotar valores para o coeficiente de rigidez horizontal  $k_h$ , a uma avaliação antecipada do comportamento das estruturas em questão.

## Referências

- ALONSO, U. R. Dimensionamento de fundações profundas. Blucher, São Paulo, 2012.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6122. Projeto e execução de fundações. Rio de Janeiro. 2019.
- BIOT, M. A. Bending of an infinite beam on a foundation. *Journal of Applied Mechanics*, 59, p.A1-A7, 1937.
- DINIS, H. Pontes de Vigas Retas. Autografia, Rio de Janeiro, 2022.
- HIRAI, H. A Winkler model approach for vertically and laterally loaded piles in nonhomogeneous soil. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 36 (17), p.1869-1897, 2012.
- KANAKESWARARAO, T.; GANESH, B. Analysis of pile foundation subjected to lateral and vertical loads. *International Journal of Engineering Trends and Technology*, 46 (2), p.113-127, 2017.
- OTÁLVARO, I. F.; NANCLARES, F. J. Elementos para obtener el módulo de reacción de subrasante. *Dyna*, 76 (157), p. 81- 89, 2009.
- RILEY, W. F. L. D.; MORRIS, D. H. *Mecânica dos Materiais*. Rio de Janeiro: LTC, 2002.
- TAMOIIO, J. L. P. Simulação numérica solo-estaca pelo Método dos Elementos Finitos. Doutorado em Engenharia das Estruturas. UFRGS, Porto Alegre, 2015.
- TERZAGHI, K. Evaluation of coefficients of subgrade reaction. *Géotechnique*, 5 (4), p.297-326, 1955.
- TIMOSHENKO, S. *Resistência dos Materiais*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1985.
- VELLOSO, D. A.; LOPES, F. R.. *Fundações, volume 2: Fundações Profundas*. São Paulo: Oficina de Textos, 2010.