

Análise não linear de vigas contínuas de concreto armado: avaliação dos limites de redistribuição das normas NBR 6118, Eurocode 2: EN 1992-1-1 e ACI 318

Luciano Soares de Arruda¹, Fabricio Calazans Ferreira de Farias², Andrés Batista Cheung³

¹SAP Engenharia Ltda / Projetista Estrutural / luciano.srr@outlook.com

²Engenheiro Civil / fabricio_cff@hotmail.com

³Universidade Federal de Mato Grosso do Sul/ Faculdade de Engenharias, Arquitetura e Geografia (FAENG) / andres.cheung@ufms.br

Resumo

Os fenômenos da fissuração do concreto e escoamento da armadura impõem a não linearidade física no comportamento de seções de concreto armado. Neste sentido, as normas NBR 6118 (2014), Eurocode EN-1992-1-1 (2004) e ACI-318 (2014) tratam da redistribuição dos momentos fletores, nas seções contínuas submetidas à flexão simples, ao trazer procedimentos que permitam fazê-la limitando as rotações plásticas e a profundidade relativa da linha neutra no estado limite último (ELU). Utilizou-se duas metodologias para a obtenção das rotações e dos momentos últimos em três vigas contínuas, cada uma dimensionada a partir da análise linear com redistribuição preconizada em cada norma, sendo a análise não linear empregada com o auxílio do framework Gid+OpenSees e a análise plástica realizada a partir do gráfico momento-curvatura. Foram discutidas as formulações adotadas para a estimativa do comprimento da rótula plástica e a influência dos modelos constitutivos nas duas análises. Os resultados indicaram equiparidade entre a NBR 6118:2014 e as outras duas normas, no que se refere as condições para a redistribuição, entretanto, existindo possibilidade para o aumento da máxima redistribuição permitida pela norma brasileira. As redistribuições impostas para o ELU foram inferiores às obtidas com os resultados da análise não linear. As seções dimensionadas a partir da norma ACI-318 (2014) apresentaram maiores valores para o momento último resistido devido ao menor limite de redistribuição e maiores taxas de armadura mínima, enquanto as vigas dimensionadas pela NBR 6118 (2014) e Eurocode EN-1992-1-1 (2004) apresentaram menores cargas últimas, porém com maior plastificação. Todas as vigas apresentaram comportamento dúctil na iminência do colapso.

Palavras-chave

Análise não linear; vigas; concreto armado; redistribuição; rótulas plásticas.

1. Introdução

O concreto armado é um material que apresenta comportamento não linear na relação tensão versus deformação a depender da magnitude dos carregamentos. Isso ocorre devido a duas características físicas essenciais dos seus materiais constituintes, sendo elas: fissuração do concreto e escoamento do aço.

Segundo a norma brasileira NBR 6118 (2014), a análise de uma estrutura consiste em determinar os efeitos das ações nesta, a fim de efetuar verificações dos estados-limites últimos e de serviço. Ainda segundo a norma brasileira, para as estruturas de concreto armado são permitidos cinco tipos de análise estrutural, a saber: Análise linear, Análise linear com redistribuição, Análise plástica, Análise não linear e Análise através de modelos físicos.

De modo semelhante à NBR 6118 (2014), o código europeu, Eurocode 2: EN 1992-1-1 (2004), permite quatro dos cinco tipos de análise, sendo a feita por modelos físicos a única não permitida. Já na norma norte americana, o ACI 318 (2014), os tipos de análises permitidos são descritos da seguinte forma: Análise de primeira ordem, Análise elástica de segunda ordem, Análise inelástica de segunda ordem e Análise com elementos finitos.

Sobre os tipos de análise estrutural, de acordo com Buchaim (2001), “*Em qualquer uma delas as condições de equilíbrio e de resistência devem ser satisfeitas, e as diferenças entre elas originam-se das leis constitutivas adotadas para os materiais e do eventual preenchimento das condições de compatibilidade.*” Desta forma, para a análise não linear da capacidade de rotação plástica de uma peça de concreto armado fletida, é pressuposto um quadro de fissuração estabilizado e são colocados dois problemas ocultos nas análises linear com e sem redistribuição, a saber:

- ✓ a determinação da rigidez de peças estruturais fissuradas e não fissuradas e;
- ✓ a comprovação da capacidade de rotação plástica, que corresponde a delimitar as deformações extremas nos materiais a seus valores últimos.

A redistribuição de momentos fletores é um fenômeno que ocorre devido à NLF do concreto armado. No entanto, a norma brasileira e as principais normas internacionais permitem que se admita simplificada a redistribuição linear parcial dos esforços, sendo respeitadas algumas restrições. A exemplo, cita-se a NBR 6118:2014, segundo a qual não se obriga a verificação da capacidade de rotação das rótulas plásticas para vigas cujo parâmetro de ductilidade $x/d \leq 0,25$ (para concretos de $f_{ck} \leq 50MPa$, ou $x/d \leq 0,15$ para concretos de $f_{ck} > 50MPa$).

O objetivo principal deste trabalho é avaliar a assertividade dos modelos de análise linear com redistribuição de momentos propostos pelas normas NBR 6118 (2014), Eurocode 2: EN 1992-1-1 (2004) e ACI 318 (2014), utilizando um modelo em elementos finitos para a análise não linear dos esforços e da capacidade de rotação plástica das rótulas nas seções críticas em Estado Limite de Serviço (ELS) e Estado Limite Último (ELU).

2. Revisão da Literatura

2.1 Formação de rótula plástica

Segundo Carneiro (1960), quando, numa estrutura hiperestática de material elasto-plástico, as cargas aumentam progressiva e proporcionalmente, surgem regiões plastificadas limitadas, nas regiões críticas (momentos máximos) onde se atingem os momentos de plastificação do aço. Tais regiões são caracterizadas como rótulas plásticas. Ainda sobre o conceito de rótula plástica, Carneiro (1961) coloca como: “[...] região de pequeno comprimento, nas vizinhanças de uma seção de momento máximo, que entra em fase plástica [...]”. O autor cita que nessa região verifica-se grande deformação plástica, correspondente a rotação da rótula plástica, que é o ângulo de descontinuidade do eixo da peça de um lado ao outro da rótula. Na Figura 1 é exemplificada uma rótula plástica formada na região de apoio, onde l_p é o comprimento da rótula plástica.

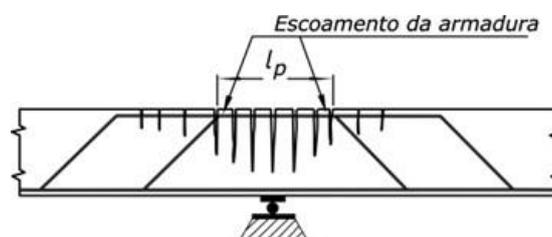


Figura 1 - Rótula plástica.

Fonte: Adaptada de Carneiro (1960)

Exemplificando com uma viga bi engastada com carga uniformemente distribuída, aumentando-se gradualmente a carga, primeiramente se chegaria na fase de escoamento do aço nas seções dos apoios, onde os momentos são superiores aos do vão, formando-se assim as duas primeiras rótulas plásticas nos engastes, enquanto a seção do vão ainda permanece na fase elástica. De acordo com Carneiro (1961) qualquer aumento posterior do carregamento seria suportado pela viga como se ela fosse rotulada nos dois apoios. Continuando com o acréscimo da carga, as rótulas sofreriam grandes deformações plásticas, sem que houvesse aumento nos momentos. Entretanto, os esforços se redistribuiriam na viga, de forma a manter a estrutura em equilíbrio, e assim, o momento na seção crítica do vão sofreria um acréscimo. Ao ser atingido o momento de plastificação no vão, forma-se a terceira rótula plástica e a viga forma um sistema hipostático, entrando em colapso.

A capacidade de rotação plástica é definida como uma diferença entre a rotação correspondente à carga última e a rotação verificada no início do escoamento das armaduras.

$$\theta_{pl} = \int_0^{l_{pl}} \left[\left(\frac{1}{r} \right)_{plástica} - \left(\frac{1}{r} \right)_{elástica} \right] dx \quad (1)$$

Sendo,

θ_{pl} a rotação plástica;

l_{pl} o comprimento da rótula plástica;

$\left(\frac{1}{r} \right)_{plástica}$ e $\left(\frac{1}{r} \right)_{elástica}$ a curvatura plástica e elástica, respectivamente;

Nas seções críticas, há dificuldades na obtenção da rotação, uma vez que as curvaturas se desenvolvem de forma descontínua, devido à variação da rigidez à flexão nas seções fissuradas e, também, nas seções entre fissuras. Em geral, a plastificação é restrita a uma região muito limitada da estrutura, portanto esta pode ser simulada, em peças lineares (como as vigas), através de uma rótula plástica concentrada na seção crítica. Nas seções críticas, a demanda de rotação plástica decorrente da análise não pode superar a capacidade de rotação plástica correspondente (BUCHAIM, 2001).

Baker (1950) distinguiu a formação de rótulas plásticas a depender da natureza dos esforços que a formam em dois tipos, a saber:

- ✓ Tipo A) rótulas plásticas com trações: formadas por peças solicitadas preponderantemente à flexão simples ou composta, com predominância da flexão, com armaduras inferiores à armadura-limite. Nas rótulas deste tipo, a capacidade de rotação da rótula plástica está vinculada à capacidade de deformações no escoamento e encruamento da armadura, havendo uma redução da altura da zona comprimida do concreto até que a borda comprimida atinja o encurtamento de ruptura;
- ✓ Tipo B) rótulas plásticas totalmente comprimidas: formadas em peças cuja solicitação preponderante é a flexão composta, com predominância da compressão (compressão excêntrica). Portanto, nas rótulas desta natureza, a capacidade de rotação da seção crítica depende especificamente da plastificação do concreto junto à borda mais comprimida. Portanto, não há fissuração e o limite de rotação é muito inferior às rótulas do tipo A.

2.2 Comprimento das rótulas plásticas

Conforme elucidado por Carneiro (1960), ao aproximar-se do colapso pela formação de rótulas nas seções de momento fletor máximo, há zonas ainda no estágio I, bem como zonas fissuradas no estágio II, e, finalmente, os pequenos trechos plastificados, que se encontram no estágio III. Nesta fase, a fissuração já tende a ser tão preponderante que se pode desprezar a diferenciação entre zonas fissuradas e não fissuradas, se atendo à caracterização entre os trechos plastificados e o restante da

estrutura, a qual, na análise proposta pelo autor, é suposta no estágio II. A recomendação é de que seja tomado um valor intermediário para a rigidez da peça fora da zona plastificada, sendo ele a média entre as rigidezes no fim do estágio I e fim do estágio II.

Em décadas de estudo da ductilidade das seções de concreto armado, diversas considerações foram desenvolvidas a respeito do comprimento dos trechos plastificados das estruturas. Afinal, conhecer o comprimento das rótulas plásticas é parte essencial da compreensão dos seus limites e desempenho. Conforme Zhao et al. (2011), o comprimento de rótula é definido como sendo um comprimento equivalente, no qual uma curvatura plástica é considerada como constante para possibilitar a integração das curvaturas da seção transversal ao longo desse comprimento, com finalidade de determinar as capacidades de deflexão e rotação de um elemento de concreto armado. Esse comprimento, a rigor, não representa o comprimento físico em que a plastificação realmente ocorre, mas sim um comportamento "ideal".

Na tabela 1 são listadas algumas formulações adotadas, por diferentes pesquisadores e normas, a respeito do comprimento das rótulas plásticas. Nota-se um padrão no qual as características geométricas das vigas são comumente associadas à estimativa do comprimento plastificado, como a altura e o vão. Alguns autores também associam o comprimento L_p às características da armadura adotada. Para a realização na análise plástica neste trabalho, será adotada a formulação normativa do Eurocode 2: EN 1991-1-1 (2004).

Tabela 1 – Comprimentos propostos para as rótulas.

AUTOR	FORMULAÇÃO
Baker (1956)	$L_p = k \cdot d \left(\frac{z}{d}\right)^{1/4}$ $0,05L_s$ $0,5h < L_p < h$
Sawyer (1964)	$L_p = 0,5d + 0,05L_s$
Paulay e Priestley (1992)	$L_p = 0,08L_s + 0,022f_y d_b \geq 0,44f_y d_b$
Eurocode 2: EN 1992-1-1 (2004)	$L_p = 0,6h$

2.3 Análise linear com redistribuição dos esforços

Segundo Fontes e Pinheiro (2006), a análise linear seguida da redistribuição, consiste em reduzir nas seções sobre apoios de vigas contínuas, os momentos fletores, multiplicando-os por um coeficiente δ (conforme item 14.6.4.3 da NBR 6118 (2014), para elementos lineares), de acordo com os limites de δ determinados pela norma. Feita a redução dos momentos, a análise é refeita para garantir o equilíbrio, sendo essas as condições que garantem ductilidade e, dessa forma, dispensam a comprovação da capacidade de rotação plástica da seção (BUCHAIM, 2015). A análise linear com redistribuição significa supor a formação de rótula plástica na seção onde se reduz o momento, admitindo que tal seção possui a capacidade de rotação plástica necessária, garantindo sua ductilidade com os limites de altura da linha neutra.

Fontes (2005) cita que, o maior efeito da não consideração do fenômeno de redistribuição de esforços é um sub-aproveitamento da armadura de flexão nos apoios. E ainda, que tal consideração pode levar a outras vantagens como a possibilidade de um melhor arranjo de armadura nas regiões de pilares, muitas vezes "congestionadas" com alto número de barras e, em alguns casos, uma economia de aço, principalmente quando se associa esse tipo de análise com a consideração da largura colaborante das lajes às vigas. Scott e Whittle (2005) afirmam que os limites de redistribuição de 20%, como o adotado pelo ACI 318 (2014), parecem ser excessivamente conservadores, já que, segundo as conclusões de seu estudo, seria razoável assumir que o limite de 30% de redistribuição, como na EN 1992-1-1 (2004), possa ser aumentado, desde que sejam avaliadas as condições relativas à aberturas de fissuras.

Barrueto (2018), em seu estudo experimental, realizou os ensaios de quatro vigas de concreto armado, uma dimensionada de acordo com os momentos elásticos, sem redistribuição, e as outras três com

diferentes valores de redistribuição, com o máximo de 30%. O autor constatou que para a redistribuição de momentos de 30% adotada, obteve-se comportamento em serviço adequado, conforme a norma peruana E.60 (2009), a qual adota o ACI 318 (2014) como referência, e assim impõe as mesmas condições e limites para a redistribuição de momentos do código norte americano. Afirmou ainda que aplicando as equações e limites da EN 1992-1-1 (2004) e do ACI 318 (2014) para a viga estudada, as máximas redistribuições permitidas seriam 28% e 19%, respectivamente.

Queiroz e Santos (2021) apresentaram dois modelos para a análise do efeito da plastificação na redistribuição de esforços em estruturas de concreto armado. Foram realizadas comparações utilizando-se os critérios da NBR 6118 (ABNT, 2014) para coeficientes de redistribuição de esforços, em que se verificou grande influência da relação entre altura da seção e comprimento do vão e pequena influência da resistência característica à compressão do concreto em ambos os métodos considerados. Foi observado, como esperado, a influência da esbelteza nos coeficientes de redistribuição.

2.4 NBR 6118:2014

Segundo a NBR 6118 (2014), quando em uma determinada seção transversal de viga, se reduz um momento de M para δM , a profundidade da linha neutra deve atender os seguintes limites máximos:

$$x/d \leq (\delta - 0,44)/1,25, \text{ para concretos com } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \quad (2)$$

$$x/d \leq (\delta - 0,56)/1,25, \text{ para concretos com } 50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \quad (3)$$

Onde:

δ = coeficiente de redistribuição; seu valor varia entre 0,75 e 1 para a NBR 6118 (2014)

x = Profundidade da linha neutra no ELU

d = altura útil da viga

Devendo ser respeitados os mínimos valores de δ , sendo $\delta \geq 0,90$ para estruturas de nós móveis e, $\delta \geq 0,75$ pra qualquer outro caso. Para $\delta = 1$ (análise linear elástica), ou seja, adotando o valor total do momento M , sem nenhuma redução, os máximos valores que podem ser adotados para a posição da linha neutra x/d , para que se garanta ductilidade adequada ao elemento estrutural, conforme item 14.6.4.3 na NBR 6118 (2014):

$$x/d \leq 0,45, \text{ para concretos com } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \quad (4)$$

$$x/d \leq 0,35, \text{ para concretos com } 50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \quad (5)$$

Portanto, quanto menor o valor de x/d , menor a área de concreto comprimido e, menor será o valor que poderá ser adotado para δ (desde que se respeitem os limites já mencionados) implicando assim em maiores redistribuições.

2.5 EN 1992-1-1:2004

Assim como ocorre na NBR 6118 (2014), a EN 1992-1-1 (2004) permite que a análise linear seguida de redistribuição de esforços seja aplicada em verificações de elementos estruturais em relação aos estados limites últimos, e não nos estados limites de utilização, e ainda, que os momentos poderão ser redistribuídos desde que as seções se mantenham equilibradas em relação as carga aplicadas. A EN 1992-1-1 (2004) coloca ainda, para lajes e vigas contínuas, duas restrições que devem ser obedecidas para a realização de distribuição de esforços, sendo elas, que as lajes e vigas sejam

solicitadas predominantemente à flexão e, que a relação entre vãos adjacentes seja limitada entre 0,5 e 2,0.

Em relação aos limites impostos no Eurocode 2 (2004) ao coeficiente de redistribuição dos momentos de M para δM , as seguintes equações são apresentadas:

$$\delta \geq k_1 + k_2 \frac{x_u}{d} \quad (f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}) \quad (6)$$

$$\delta \geq k_3 + k_4 \frac{x_u}{d} \quad (f_{ck} > 50 \text{ MPa}) \quad (7)$$

$$\delta \geq k_5 \text{ para aço das classes B ou C} \quad (8)$$

$$\delta \geq k_6 \text{ para aço da classe A)} \quad (9)$$

Onde:

δ = Coeficiente de redistribuição (relação entre o momento após a redistribuição e o momento fletor elástico)

x_u = profundidade da linha neutra no ELU após a redistribuição

d = altura útil

E os valores sugeridos pela EN 1992-1-1 (2004) para os coeficientes k_1 , k_2 , k_3 , k_4 , k_5 e k_6 são:

$$k_1=0,44 \quad k_2=1,25 \left(0,6 + \frac{0,0014}{\epsilon_{cu2}}\right) \quad k_3=0,54 \quad k_4=1,25 \left(0,6 + \frac{0,0014}{\epsilon_{cu2}}\right) \quad k_5=0,7 \quad k_6=0,8 \quad (10)$$

Onde:

ϵ_{cu2} = deformação última do concreto; e os valores que lhe são atribuídos estão indicados na Tabela 2.

Tabela 2- Deformação última do concreto conforme f_{ck}

Deformação última	Classe de resistência do concreto - f_{ck} (MPa)					
	12 a 50	55	60	70	80	90
ϵ_{cu2} (‰)	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,6

Fonte: Adaptada da EN 1992-1-1 (2004)

Analisando a equação (8) limitante do coeficiente de redistribuição δ para $f_{ck} \leq 50$ MPa, e aplicando os valores dos coeficientes k_1 e k_2 , chega-se em:

$$\delta \geq 0,44 + 1,25 \frac{x_u}{d} \quad (11)$$

E ainda, através de simples manipulação matemática da equação (2), limitante da profundidade da linha neutra para concretos de $f_{ck} \leq 50$ MPa (NBR 6118, 2014), nos casos onde se realiza redistribuição de momentos, chega-se à mesma equação da EN 1992-1-1 (2004), citada acima. Araújo (2009), cita que, tanto a NBR 6118 (2014), como o Eurocode 2 (2004), adotam para a redistribuição de momentos fletores, critérios semelhantes aos sugeridos pelo CEB-FIB Model code (1990). Dessa forma, as duas normas aplicam a limitação de $x/d = 0,45$ para a altura máxima da linha neutra, no caso de concretos com $f_{ck} \leq 50$ MPa. Porém, sendo o coeficiente $k_5 = 0,7$ para aços das classes B ou C da classificação do Eurocode 2 (2004) apresentada na Tabela 3, onde melhor se enquadraria a categoria brasileira CA-50, a EN 1992-1-1 (2004) permite uma redistribuição de esforços de até 30%, sem fazer distinção entre estruturas de nós móveis e fixos, contra 25% permitidos pela NBR 6118 (para estruturas de nós fixos). Na Tabela 4 são mostradas as propriedades mecânicas dos aços conforme a NBR 7480 (2022). Da mesma forma, sendo $k_6 = 0,8$ para aços da classe A da EN 1992-

1-1 (2004), onde melhor se enquadra o CA-60, a norma europeia permite uma redistribuição de momentos de até 20%, contra os mesmos 25% da norma brasileira, já que esta não considera os diferentes tipos de aço para definição dos critérios de limites de δ .

No caso de concretos com $f_{ck} > 50$ MPa, diferente da norma brasileira, o Eurocode 2 (2004) faz a consideração, através do coeficiente k_4 , dos diferentes valores considerados para a deformação última do concreto ϵ_{cu2} . Observa-se que, conforme crescem as resistências dos concretos, diminuem os valores de ϵ_{cu2} .

Tabela 3 - Propriedades dos aços para concreto armado segundo a EN 1992-1-1 (2004)

Forma do produto	Barras e fios		
	Classe	A	B
Valor característico da tensão de escoamento f_{yk} ou $f_{0,2k}$ (MPa)	400 a 600		
Valor mínimo de $k = \left(\frac{f_t}{f_y} \right)_k$	$\geq 1,05$	$\geq 1,08$	$\geq 1,15$ $< 1,35$
Valor característico do alongamento à tensão máxima, ϵ_{uk} (%)	$\geq 2,50$	$\geq 5,0$	$\geq 7,5$

(Fonte: Adaptada da EN 1992-1-1:2004)

Tabela 4 - Propriedades dos aços para concreto armado segundo NBR 7480 (2022)

Valores mínimos de tração	Categoria		
	CA-25	CA-50	CA-60
Resistência característica de escoamento f_{yk} MPa	250	500	600
Limite de resistência f_{st} MPa	$1,20 f_y$	$1,10 f_y$	$1,05 f_y$
Alongamento após ruptura em 10ϕ A %	18	8	5
Alongamento total na força máxima A_{gt} %	-	5	-

(Fonte: Adaptada da NBR 7480:2022)

Sendo assim, para a aplicação do coeficiente δ com valor mínimo permitido, por exemplo, $\delta = 0,7$ para aços das classe B e C, teríamos exigências de menores relações x/d , tanto quanto maior for a resistência do concreto. Na Tabela 5 encontram-se os valores de x/d necessários para aplicação de δ com valores de 0,75 e 1 (sem redistribuição), segundo a NBR 6118 (2014) e na EN 1992-1-1 (2004) – para aços das classes B ou C.

Tabela 5 – Valores de x/d de acordo com o f_{ck}

f_{ck} (MPa)	δ			
	0,75	1,0	0,75	1,0
	x/d		x/d	
	EN 1992-1-1(2004)		NBR 6118(2014)	
55	0,160	0,351	0,152	0,352
60	0,156	0,341	0,152	0,352
70	0,150	0,329	0,152	0,352
80	0,148	0,324	0,152	0,352
90	0,148	0,324	0,152	0,352

2.6 ACI 318:2014

Assim como as duas normas já citadas, o ACI 318 (2014) permite a redução de momentos fletores calculados por meio da teoria elástica em seções de máximo momento positivo ou negativo, em membros contínuos submetidos a flexão. Entretanto, os critérios impostos são diferentes, sendo que, a altura da linha neutra não é limitada diretamente como na NBR 6118 (2014) e no Eurocode 2 (2004). As condições a serem atendidas são as que seguem:

- ✓ $\epsilon_t \geq 0,0075$ na seção onde o momento é reduzido
- ✓ Na seção onde se reduz o momento, a redistribuição não deve exceder o menor valor entre $1000\epsilon_t$ por cento e 20%

Onde:

ϵ_t = deformação unitária líquida do aço em tração

Segundo Trygstad (2013), com essa disposição ($\epsilon_t \geq 0,0075$), a norma reconhece o comportamento inelástico das estruturas de concreto e constitui um movimento em relação ao “projeto limite”. E ainda, que a aplicação da redistribuição de momentos pode resultar em redução substancial na armadura total necessária, que, além de evitar regiões congestionadas pelo aço, pode proporcionar a redução das dimensões do elemento de concreto.

3. Materiais e Métodos

Neste estudo, três estruturas com a mesma seção transversal, porém com diferentes valores de vão são considerados.

3.1 Análise não-linear (ANL)

Foi utilizado o framework OpenSees de código aberto baseado na técnica de elementos finitos. O programa é adequado à modelagem e análise estrutural, bem como problemas geotécnicos. Inclui os recursos providos pelo GiD nas etapas de pré e pós processamento das análises numéricas realizadas pela ferramenta de análise. Para a análise deste trabalho, foi utilizado o método *Full Newton-Raphson* para o processo iterativo. O número máximo de iterações por passo de carga adotado foi o sugerido, de 50. O critério de convergência, também sugerido pelo programa, foi de $x^{(n)} - x^{(n-1)} \leq 10^{-3}$.

Para a análise não linear de peças de concreto armado, foi utilizado o modelo de não linearidade para descrever de forma mais acurada o comportamento inelástico do concreto armado, o *Fiber Section* (Figura 2a). Para isso, a seção transversal do elemento foi subdividida em fibras (camadas), em que cada fibra possui uma relação particular de tensão-deformação. Para o modelo constitutivo do concreto foi utilizado o modelo Chang e Mander (1994), que considera o comportamento confinado e não-confinado no estado de tração e compressão (Figura 2b). Para o aço, foi utilizado o modelo elastoplástico com encruamento não-linear.

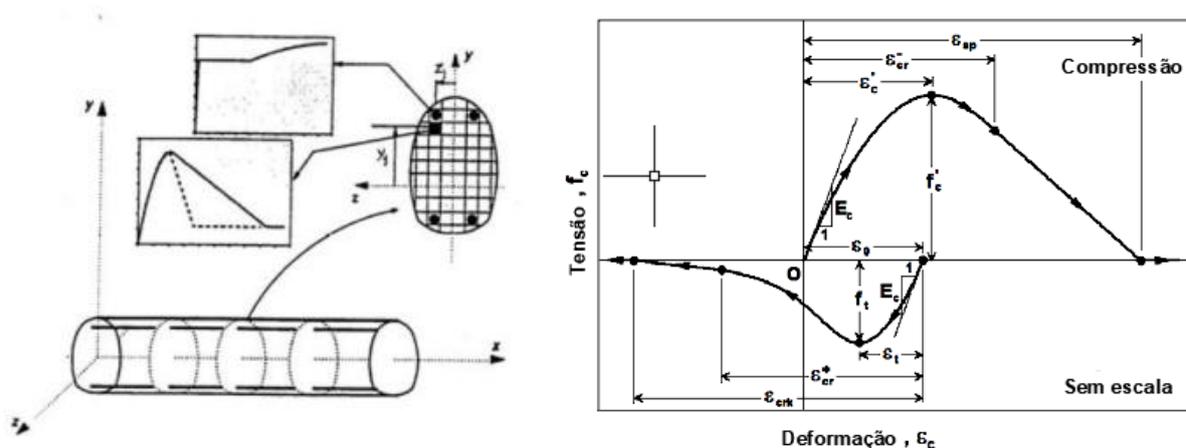


Figura 2 – (a) Subdivisão da seção transversal em fibras. (b) Modelo constitutivo do concreto de Chang-Mander Fonte: Opensees.berkeley.edu.

A diferenciação entre o concreto do núcleo e de cobrimento remete às formulações adotadas pelo modelo constitutivo na descrição dos comportamentos do concreto confinado e não-confinado. As seções transversais adotadas no trabalho foram discretizadas em 40 fibras no eixo local y e 16 no eixo z.

3.2 Análise simplificada da rotação plástica (AP)

As vigas foram analisadas também de acordo com o método simplificado em que se considera a não linearidade física do concreto armado através da confecção do momento diagrama-curvatura, utilizando para isso o método apresentado pelo CEB-FIP Model Code (1991). Nesta análise é levada em consideração a seção crítica solicitada à flexão simples, sendo aplicadas as formulações do método para a determinação dos pontos notáveis relativos aos momentos de fissuração (M_r), de escoamento (M_y) e último (M_u), conforme a teoria clássica do Concreto Armado. Em posse das curvaturas ($1/r_i$) determinadas para estes momentos, multiplica-se essas curvaturas pelo comprimento teórico da rótula plástica (L_p), de modo a obter a rotação (θ_i):

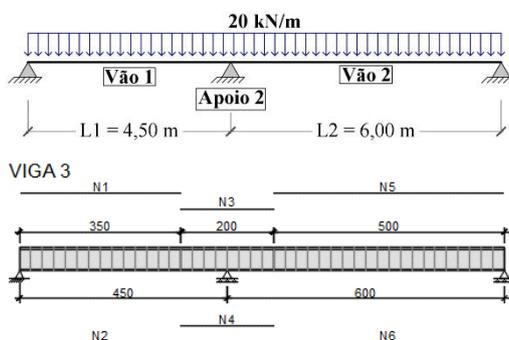
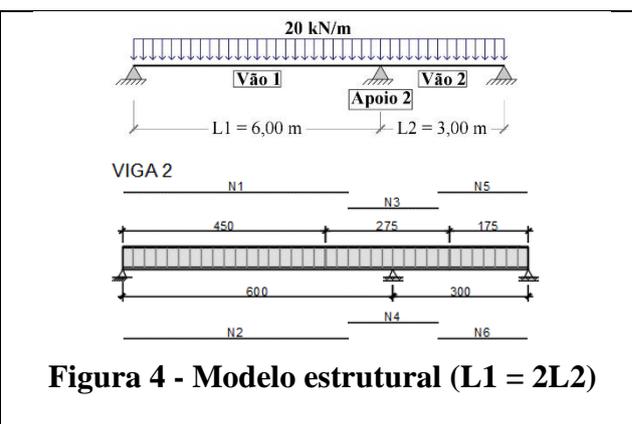
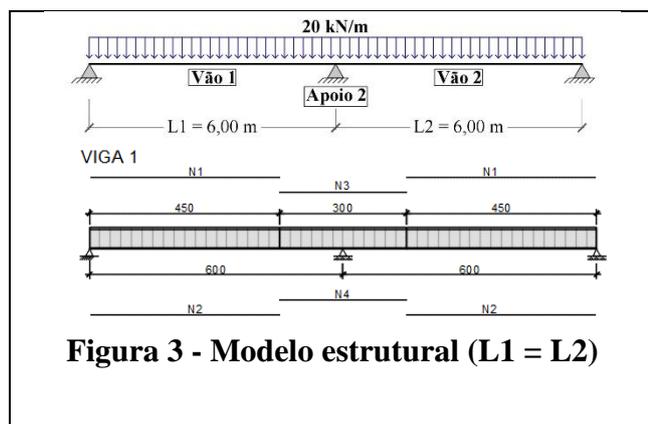
$$\theta_i = L_p \cdot \frac{1}{r_i} \quad (12)$$

Destaca-se que a generalização da rotação para o comprimento da rótula adotado, $L_p = 1,2h$ segundo o EN 1992-1-1:2004, indica a consideração dos valores encontrados de acordo com as equações constitutivas dos materiais na seção crítica como válidos para toda a extensão da rótula.

3.3 Vigas analisadas

Para cada norma estudada, foram realizados os estudos de caso de três vigas de concreto armado, ambas com a mesma seção transversal, possuindo 20 cm de largura (b) e 50 cm de altura (h), sendo que, a única característica de diferenciação entre os três casos foi a relação entre os comprimentos dos vãos longitudinais de cada um, como mostrado nas Figuras 3, 4 e 5.

Analisando individualmente cada viga, fica claro que entre os dois vãos de uma mesma viga, o menor sempre sofre um maior aumento percentual do momento, e conseqüentemente, também da área de aço



Foi utilizada seção do tipo Fiber Section. O modelo constitutivo para o concreto, tanto do núcleo, quanto do cobrimento, foi o de Chang-Mander, enquanto o modelo para as armaduras foi o modelo Reinforcing Steel. Foi descrito no modelo um concreto da classe de resistência C25, seguindo o pressuposto utilizado no dimensionamento das armaduras.

NOMENCLATURA	VALOR
Tensão de compressão (f'_c)	25 MPa
Deformação no pico de compressão (ϵ'_{cr})	0,002
Módulo tangente inicial (E_s)	27,5 GPa
Parâmetro na equação Tsai para compressão (r)	2,91
Deformação crítica na envoltória de compressão (ϵ_{cr})	1,035
Tensão de tração (f_t)	2,56 MPa
Deformação no pico de tração	0,00011
Parâmetro na equação Tsai para compressão (r)	1,41
Deformação crítica na envoltória de tração (ϵ^+_{cr})	10000

NOMENCLATURA	VALOR
Tensão de escoamento (f_y)	500 MPa
Tensão última (f_{su})	540 MPa
Módulo tangente inicial (E_s)	210 GPa
Módulo tangente de endurecimento (E_{sh})	8 GPa
Deformação correspondente ao início do endurecimento (ϵ_{sh})	0,005
Deformação no pico de tensão (ϵ_{su})	0,010

Para o modelo do aço das armaduras, também foram utilizados os parâmetros de elasticidade do material conforme dimensionamento prévio, sendo o aço utilizado o CA50.

4. Análise e resultados

A partir das geometrias definidas foram realizados os dimensionamentos das seções transversais aos momentos elásticos, para obtenção das áreas de aço antes da redistribuição. Em seguida, foi realizada a redução do momento no apoio negativo para cada configuração de viga estudada, e de acordo com as três normas técnicas. Desta forma, para atingir o equilíbrio foram obtidos os novos momentos positivos. Na Tabela 8 apresentam-se os resultados de momentos fletores antes e depois da redistribuição, bem como a diferença percentual entre tais momentos.

Tabela 8 - Momentos fletores e área de aço antes e depois da redistribuição.

Vãos	Norma	Vão 1: momentos (kN·m)		Aumento %	Vãos	Norma	Vão 1: área de aço (cm ²)		Aumento %
		Antes	Depois	momentos			Antes	Depois	As
L1 = L2	NBR	70,88	83,18	+17,35	L1 = L2	NBR	3,77	4,48	+18,83
	EN	70,88	85,76	+20,99		EN	3,79	4,66	+22,96
	ACI	70,88	78,02	+10,07		ACI	3,60	3,98	+10,56
L1 = 2L2	NBR	83,17	93,05	+11,88	L1 = 2L2	NBR	4,48	5,06	+12,95
	EN	83,17	95,10	+14,34		EN	4,51	5,22	+15,74
	ACI	83,17	91,04	+9,46		ACI	4,26	4,69	+10,09
L1 = 0,75L2	NBR	28,92	37,68	+30,29	L1 = 0,75L2	NBR	1,48*	1,95	+31,76
	EN	28,92	39,57	+36,83		EN	1,53	2,05	+33,99
	ACI	28,92	35,84	+23,93		ACI	1,43*	1,78*	+24,48
Vãos	Norma	Apoio: momentos (kN·m)		Redução %	Vãos	Norma	Apoio: área de aço (cm ²)		Redução %
L1 = L2	NBR	126,00	94,50	-25,00	L1 = L2	NBR	7,10	5,15	-27,46
	EN	126,00	88,20	-30,00		EN	7,17	4,81	-33,01
	ACI	126,00	107,41	-14,76		ACI	6,67	5,60	-16,04
L1 = 2L2	NBR	94,50	70,88	-25,00	L1 = 2L2	NBR	5,15	3,77	-26,80
	EN	94,50	66,15	-30,00		EN	5,18	3,52	-32,05
	ACI	94,50	75,60	-20,00		ACI	4,88	3,85	-21,11
L1 = 0,75L2	NBR	102,38	76,79	-25,00	L1 = 0,75L2	NBR	5,62	4,11	-26,87
	EN	102,38	71,67	-30,00		EN	5,67	3,84	-32,28
	ACI	102,38	81,91	-20,00		ACI	5,32	4,19	-21,24
Vãos	Norma	Vão 2: momentos (kN·m)		Aumento %	Vãos	Norma	Vão 2: área de aço (cm ²)		Aumento %
L1 = L2	NBR	70,88	83,18	+17,35	L1 = L2	NBR	3,77	4,48	+18,83
	EN	70,88	85,76	+20,99		EN	3,79	4,66	+22,96
	ACI	70,88	78,02	+10,07		ACI	3,60	3,98	+10,56
L1 = 2L2	NBR	1,97	6,03	+206,09	L1 = 2L2	NBR	0,10*	0,30*	+203,03
	EN	1,97	7,11	+260,91		EN	0,10*	0,36*	+246,15
	ACI	1,97	5,04	+155,84		ACI	0,10*	0,24*	+150,00
L1 = 0,75L2	NBR	80,01	90,53	+13,15	L1 = 0,75L2	NBR	4,30	4,91	+14,19
	EN	80,01	92,71	+15,87		EN	4,32	5,08	+17,59
	ACI	80,01	88,37	+10,45		ACI	4,09	4,54	+11,00

Onde:

Antes e Depois = momentos antes e depois da redistribuição, respectivamente.

Aumento e Redução % momentos = aumento ou redução % dos momentos depois da redistribuição.

Na Tabela 8, apresentam-se as áreas de aço necessárias calculadas para cada caso, além das diferenças percentuais entre a área de aço antes e depois da redistribuição. Para comparação das áreas de aço calculadas, não foram utilizadas as áreas de aço mínimas nas seções onde eram necessárias, de acordo com cada norma.

Para a maioria dos casos estudados, foi possível aplicar a redução máxima dos momentos permitida por cada uma das normas. Porém, observa-se que no caso de vãos iguais ($L1=L2$), o qual apresentou os maiores momentos fletores no apoio entre todos os casos analisados, para o ACI 318 (2014) não foi possível utilizar a máxima redução permitida de 20%, limitando a redução ao valor de $1000\varepsilon_t$ (%).

A partir da resolução dos modelos das vigas analisadas no OpenSees obteve-se os valores dos esforços solicitantes e das deformações e rotações totais e plásticas para cada passo de carga referente às iterações do deslocamento total imposto.

Concomitantemente, elaborou-se os gráficos momento-curvatura das seções do apoio intermediário de cada viga, seções estas nas quais foram analisadas as capacidades de rotação plástica. Ressalta-se que na obtenção do valor do momento de escoamento foi utilizado o valor normativo para o módulo de elasticidade tangente do concreto ($E_{cs} = 24 \text{ GPa}$) e que o comprimento da rótula plástica ($L_p = 0,6h$) adotado interfere diretamente nas rotações obtidas a partir desta análise.

Como descrito na equação (1), a rotação plástica é definida como a diferença entre as rotações última e a que corresponde ao escoamento da armadura tracionada. Desta forma, elencou-se na Tabela 9 a seguir uma comparação dos valores obtidos para os momentos de escoamento e último e as rotações correspondentes:

Tabela 9. Resumo dos valores dos momentos notáveis e da rotação plástica em cada análise.

Viga	Norma	My (kNm)		Mu (kNm)		θ_{pl} (mrad)	
		AP	ANL	AP	ANL	AP	ANL
Viga 1	NBR	109,46	125,44	131,05	138,55	10,26	14,86
	EN	102,43	118,36	120,63	130,66	10,13	17,44
	ACI	119,01	137,71	151,11	148,77	10,40	18,12
Viga 2	NBR	81,17	91,63	94,31	101,14	10,00	8,45
	EN	75,93	86,95	87,06	95,28	9,93	7,76
	ACI	82,97	94,19	99,46	102,86	10,04	8,93
Viga 3	NBR	88,24	101,32	103,45	111,54	10,10	11,34
	EN	82,59	95,64	95,47	105,16	10,02	9,98
	ACI	90,05	103,42	109,57	114,02	10,14	12,04

Os valores para o momento de escoamento da seção (M_y) encontrados por meio da análise não linear (ANL) com o OpenSees foram, em média, 14,7% maiores que os momentos de escoamento encontrados por meio do diagrama momento-curvatura. A essa diferença se atribui que o modelo constitutivo adotado na análise plástica simplificada (AP) utiliza a formulação aproximada. Por outro lado, o modelo Chang-Mander incorporado à análise não linear indica que o trecho referente ao estágio II compreende maiores esforços de momento fletor, mesmo que as rotações obtidas para o momento de escoamento (θ_y) tenham variado apenas 0,28% na comparação das duas análises, indicando que a análise plástica pelo diagrama momento-curvatura utilizado possui boas aproximações para o valor desta rotação, corroborando com os trabalhos de Queiroz e Santos (2021).

Também foram encontrados valores satisfatoriamente congruentes entre as duas análises para o momento fletor último (M_u). Assim como no momento de escoamento, a análise não linear retornou valores maiores, em média 6,07% superiores à análise plástica simplificada. Ressalta-se que o

encruamento do aço, devidamente formulado no modelo constitutivo *Reinforcing Steel*, foi considerado de maneira simplificada na elaboração do diagrama momento-curvatura simplificado.

No entanto, o mesmo não se repetiu com as rotações correspondentes aos momentos últimos (θ_u). Neste caso, a análise não linear apresentou valores consideravelmente maiores para a viga 1, ao passo que para a viga 2 a tendência foi a resposta de valores inferiores à análise plástica simplificada, enquanto a viga 3 apresentou rotações últimas mais semelhantes entre as duas análises.

Frisa-se que nas três vigas analisadas, as seções dimensionadas de acordo com a norma ACI-318 (2014) apresentaram os maiores valores para as rotações últimas em ambos os métodos. As seções dimensionadas de acordo com a NBR 6118 (2014) e a EN-1992-1-1 registraram rotações últimas semelhantes, conforme esperado, uma vez que os limites máximos de redistribuição e taxa de armaduras mínimas dessas normas são semelhantes e destoam em comparação à ACI 318 (2014).

A análise não linear permite a verificação do coeficiente de redistribuição obtido e a comparação com o valor arbitrado no dimensionamento pela análise linear com redistribuição apresentados na Tabela 10.

Tabela 10. Coeficientes de redistribuição impostos e obtidos

Viga	Norma	q_u (kN/m)	δ_i	δ_o	δ_o/δ_i
Viga 1	NBR	37,59	0,75	0,82	1,093
	EN	37,81	0,70	0,77	1,100
	ACI	35,86	0,85	0,92	1,082
Viga 2	NBR	37,11	0,75	0,81	1,080
	EN	37,27	0,70	0,76	1,086
	ACI	35,41	0,80	0,86	1,075
Viga 3	NBR	37,34	0,75	0,82	1,093
	EN	37,54	0,70	0,77	1,100
	ACI	35,52	0,80	0,88	1,100

Fonte: Autor.

Em que:

q_u – Carga na viga no estado limite último;

δ_u – Coeficiente de redistribuição alcançado no estado limite último;

δ_i – Coeficiente de redistribuição imposto na análise linear com redistribuição.

Observa-se, na Tabela 10, que as vigas dimensionadas de acordo com o ACI-318(2014) apresentam as menores cargas últimas, ainda que apresentem os maiores valores para os momentos últimos (M_u). Isso se explica devido à esta norma preconizar uma taxa de área de aço mínima consideravelmente superior às demais normas. Portanto há maior resistência ao momento com menor carga resistida, indicando que essas vigas tendem a ter uma ruptura menos dúctil.

Ademais, tem-se que a premissa dos limites de redistribuição previstos nas normas estudadas é garantir que, mesmo com menor densidade de armadura para a demanda à flexão simples, a seção analisada deve manter sua capacidade de rotação plástica e apresentar um comportamento dúctil no estado limite último.

5. Conclusões

Em todos os modelos analisados foi observado comportamento dúctil nas cargas últimas, portanto, validando a premissa básica do estudo.

As redistribuições adotadas e obtidas foram compatíveis dadas as diferenças das formulações dos modelos constitutivos adotados no dimensionamento da armadura pela análise linear com redistribuição e da análise linear.

Os modelos apresentaram uma carga última resistida no mínimo 1,771 vezes maior que a carga de serviço, sendo verificado que quando menor o coeficiente de redistribuição obtido, ou seja, quanto maior é a redistribuição, também maior é a carga última resistida.

Conclui-se que a rotação última encontrada em cada modelo depende do comprimento efetivo da rótula plástica no caso da análise não linear e, no caso da análise plástica, os resultados são sensíveis à estimativa idealizada adotada para este comprimento. Portanto, a análise plástica a partir da multiplicação dos valores da curvatura no diagrama momento-curvatura deve ser melhor avaliada, com a adoção de modelos constitutivos com formulações mais precisas, tais como os modelos adotados na análise realizada no *framework OpenSees*.

6. Referências

- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. ACI 318: Building Code Requirements. Farmington Hills. 2014.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). Aço destinado a armaduras para estruturas de concreto armado – Especificação: NBR 7480. Rio de Janeiro, 2022.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). Projeto de estruturas de concreto – Procedimento: NBR 6118. Rio de Janeiro, 2014.
- BAKER, A. L. L. A Plastic Theory of Design for Ordinary Reinforced and Prestressed Concrete including Moment Re-distribution in Continuous Members. Magazine of Concrete Research, v. 2, 1950.
- BAKER, A. L. L. Ultimate load theory applied to the design of reinforced and prestressed concrete frames. Concrete Publications Ltd., London, 1956.
- BARRUETO, R. N. Estudio experimental de redistribución de momentos en viga de concreto armado. Dissertação (mestrado em engenharia) - Pontificia Universidad Católica Del Perú. Lima, p. 84. 2018.
- BUCHAIM, R. A influência da não-linearidade física do concreto armado na rigidez à flexão e na capacidade de rotação plástica. Tese (Doutorado em engenharia) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, p. 260. 2001.
- BUCHAIM, R. Exemplos de aplicação dos conceitos da seção 14: análise elástica com redistribuição limitada das solicitações. In:
- CARMO, R. N. F. D.; LOPES, S. M. R. Avaliação da redistribuição de esforços em vigas contínuas de betão de alta resistência. In: ENCONTRO NACIONAL DE BETÃO ESTRUTURAL. 2002, Lisboa. Livro de atas... Lisboa: Grupo Português de Betão Estrutural, 2002. p. 255-264.
- CARNEIRO, F. L. L. B. Cálculo das estruturas hiperestáticas de concreto armado na fase plástica. Revista estrutura, Rio de Janeiro, n. 31, p. 386-429, 1960.
- CARNEIRO, F. L. L. B. Sugestões para uma norma de cálculo plástico de estruturas hiperestáticas de concreto armado. Revista estrutura, Rio de Janeiro, n. 38, p. 49-89, 1961.
- CEB; CEB-FIP Model Code 1990 - Final Draft - Bulletin D'Information, n. 203-205; 1991.
- CHANG, G. A.; MANDER, J. B. Seismic energy based fatigue damage analysis of bridge columns: Part I — evaluation of seismic capacity. NCEER Technical Report No. NCEER-94-0006. State University of New York. Buffalo, New York, 1994.
- EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. Eurocode 2: Design of concrete structures - Part 1-1: General rules and rules for buildings (EN 1992-1-1). Bruxelas. 2004.
- FONTES, F. F. Análise estrutural de elementos lineares segundo a NBR 6118:2003. Dissertação (Mestrado em engenharia) - Escola de Engenharia de São Carlos. São Carlos, p. 120. 2005.
- FONTES, F. F.; PINHEIRO, L. M. Vigas de edifícios: análise linear com redistribuição e análise plástica. In: STUCCHI, F. R., et al. Comentários Técnicos e Exemplos de Aplicação da NB-1. São Paulo: IBRACON, 2006. Cap. 14, p. 123-135.
- PAULAY, T. and PRIESTLEY, M. J. N. Seismic Design of Reinforced Concrete and Masonry Buildings, John Wiley and Sons, New York, 1992, 767 pp.
- QUEIROZ, D. F. C. S.; SANTOS, S. H. C. Análise do Efeito da Plastificação na Redistribuição de Esforços em Estruturas de Concreto Armado. In: XII Congresso Brasileiro de Pontes e Estruturas (CBPE), 12, 2021, Rio de Janeiro.
- SAWYER, H. A. Design of concrete frames for two failure states. Proc., Int. Symp. on the Flexural Mechanics of Reinforced Concrete, ASCE-ACI, 1964.
- SCOTT, R. H.; WHITTLE, R. T. Moment redistribution effects in beams. Magazine of Concrete Research, Londres, v. 57, p. 9-20, Fevereiro 2005.
- ZHAO, X.; WU, Y.; LEUNG, A.Y.; LAM, H.F. Plastic Hinge Length in Reinforced Concrete Flexural Members. Procedia Engineering, v.14, 2011.