

## Avaliação dos Momentos Fletores Máximos em Laje Lisa Protendida Segundo o Comitê Alemão DAfStb HEFT 631 (2019)

Eduardo Thomaz<sup>1</sup>, Luiz Carneiro<sup>2</sup>, Mayra Perlingeiro<sup>3</sup>, Flávia Moll<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Instituto Militar de Engenharia / Seção de Enga. de Fortificação e Construção / ecsthomaz@terra.com.br

<sup>2</sup>Universidade Federal Fluminense / Departamento de Engenharia Civil / luizcarneiro@id.uff.br

<sup>3</sup>Universidade Federal Fluminense / Departamento de Engenharia Civil / mayraperlingeiro@id.uff.br

<sup>4</sup>Universidade Federal do Rio de Janeiro / Departamento de Estruturas / flaviamoll@poli.ufrj.br

### Resumo

Este trabalho apresenta um método simplificado, baseado no trabalho de DUDDECK e AHRENS (1994) e na teoria do método das faixas em pórtico equivalente segundo o Comitê Alemão de Concreto Armado (DAfStb HEFT 631, 2019), para a avaliação de momentos fletores máximos positivos em uma laje lisa protendida. Seus resultados foram comparados aos obtidos a partir de um programa baseado no método dos elementos finitos (MEF) feito por BHATT (2011). Verificou-se que os valores de momentos fletores máximos positivos e negativos a partir deste método simplificado foram superiores aos obtidos com o uso do programa baseado no MEF.

### Palavras-chave

Laje Lisa; concreto protendido; momentos fletores máximos; método simplificado.

### Introdução

Lajes são estruturas classificadas como bidimensionais por apresentarem medidas de largura e de comprimento muito maiores que a de espessura, cuja função é receber as cargas de utilização e transferi-las aos elementos de apoio.

Os apoios de lajes podem ser contínuos, tal como ocorre sobre vigas, ou diretos, tal como acontece sobre pilares.

Quando o apoio de lajes é direto, as cargas sobre a laje são transferidas para os pilares sobre uma área estreita, o que leva a tensões de cisalhamento elevadas ao redor dos pilares, cuja intensidade pode acarretar ruptura por punção da laje.

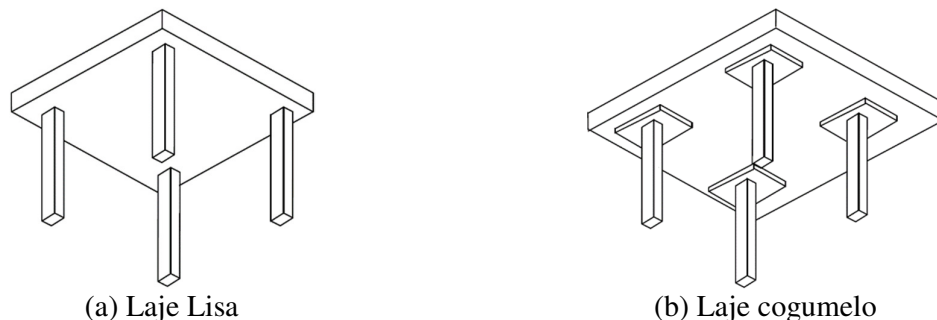
A fim de diminuir essas tensões de cisalhamento, pode ser feito um engrossamento da espessura da laje ao redor da extremidade de apoio do pilar, conhecido como capitel, o que conduz a um melhor desempenho quanto à punção em lajes com elevado carregamento (ALLEN e IANO, 2013).

Alguns tipos de lajes protendidas são maciças, com sistema de protensão sem ou com aderência, apoiadas diretamente nos pilares sem ou com capitel, cujos vãos podem variar, comumente, de 5 m a 15 m de comprimento.

Lajes lisas protendidas (*prestressed flat plates*), que são lajes maciças sem capitel, admitem aberturas e possuem vãos variando entre 8 m e 10 m nas edificações mais comuns, como se vê na Figura 1a. Proporcionam um projeto estrutural sem interferências entre vigas e instalações prediais, além de

economia de formas e execução mais rápida. No entanto, podem apresentar maiores deformações e exigem armadura contra colapso progressivo na região ao redor dos pilares.

Lajes cogumelo protendidas (*prestressed flat slabs with drop panels*), que são lajes maciças com capitel, apresentam comportamento parecido com o de lajes lisas protendidas, conforme mostrado na Figura 1b.



**Figura 1 – Tipos de lajes maciças protendidas.**

A norma ABNT NBR 6118 (2014) estabelece valores mínimos de espessuras de lajes protendidas no seu item 13.2.4. Recomenda uma espessura mínima de 16 cm, para lajes lisas, e 14 cm, para lajes cogumelo fora do capitel.

Neste trabalho, desenvolveu-se um exemplo simplificado com o objetivo de comparar os momentos fletores máximos positivos e negativos em um pavimento de laje lisa protendida, oriundos da modelagem deste em um programa baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF) realizada por BHATT (2011), aos obtidos segundo um método proposto por THOMAZ (2022), que tem por fundamento tabelas originadas a partir do estudo de DUDDECK e AHRENS (1994) e do Comitê Alemão de Concreto Armado (DAfStb HEFT 631, 2019).

### **Momentos Fletores em Lajes Lisas Protendidas**

THOMAZ (2022) desenvolveu um método simplificado para calcular os valores de momentos fletores máximos em faixas localizadas nos apoios e fora dos apoios de lajes lisas protendidas.

Esse método teve por base o trabalho de DUDDECK e AHRENS (1994) e a teoria do método das faixas em pórtico equivalente segundo o Comitê Alemão de Concreto Armado (DAfStb HEFT 631, 2019).

A Equação 1 apresenta o valor do momento fletor máximo na direção  $y$  (v. Figura 2) em faixas localizadas nos apoios e fora dos apoios de lajes lisas protendidas, expresso em kN.m/m.

$$M = k_1 \frac{p.l^2}{k_2} \quad (\text{Equação 1})$$

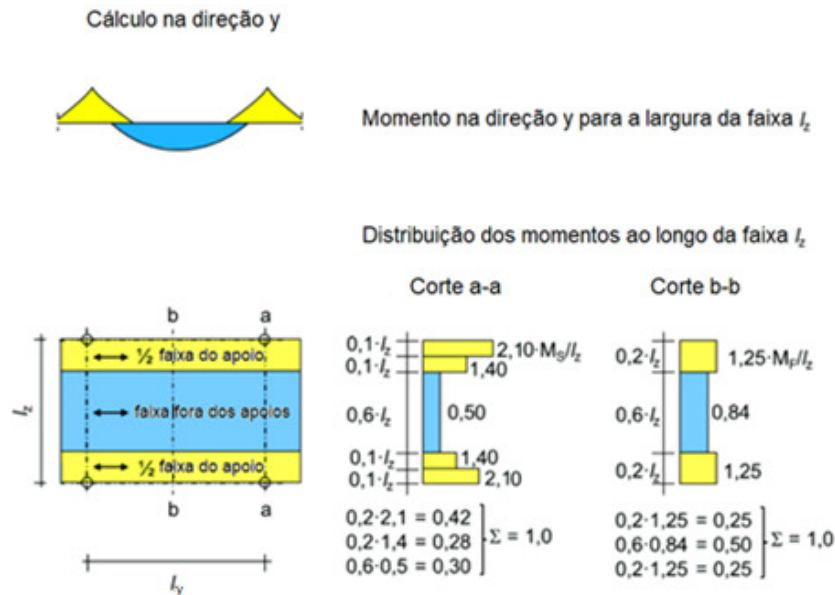
onde  $k_1$  é o coeficiente para cálculo do momento fletor máximo na direção  $y$  distribuído ao longo da faixa localizada nos apoios ou fora dos apoios (v. Figura 2);  $p$  é a carga total sobre a laje, em kN/m<sup>2</sup>;  $l$  é o vão da laje na direção  $y$ , em m; e  $k_2$  é o coeficiente proposto por THOMAZ (2022), que varia de acordo com o número de vãos e a seção de análise.

Nota-se da Figura 2 que a laje é dividida em 2 faixas, uma localizada nos apoios e outra localizada fora dos apoios, e submetida à carga acidental distribuída ao longo da direção do vão  $l_x$ .

Na faixa localizada nos apoios (cor amarela) da Figura 2, o valor do coeficiente  $k_l$  é igual a 2,10 na linha dos apoios até 10% do vão  $l_z$  (corte a-a) ou 1,40 a partir de 10% do vão  $l_z$  até 20% do vão  $l_z$  (corte a-a), enquanto na região de vão entre apoios (corte b-b), o valor do coeficiente  $k_l$  diminui para 1,25.

O coeficiente  $k_l$  pode ser igual a 1,75 (valor médio entre 2,10 e 1,40) quando se avalia a região distante 10% do vão  $l_z$  da linha de apoios na faixa localizada nos apoios (cor amarela) da Figura 2.

Em se tratando da faixa localizada fora dos apoios (cor azul) da Figura 2, o coeficiente  $k_l$  tem valor igual a 0,50 na linha dos apoios (corte a-a) ou igual a 0,84 (corte b-b) na linha fora dos apoios.



**Figura 2 – Valores do coeficiente  $k_l$  segundo DAfStb HEFT 631 (2019).**

Com base nas tabelas desenvolvidas por DUDDECK e AHRENS (1994), THOMAZ (2022) criou novas tabelas (v. Tabelas 1 a 7), que mostram o valor do coeficiente  $k_2$  para cálculo do momento fletor máximo na faixa dos apoios e na faixa fora dos apoios de lajes lisas. Os dados de entrada destas tabelas são a relação entre a carga permanente e a carga total  $g/p$  (variando de 1,00 a 0,40) sobre a laje e o número de vãos N (entre 2 e 7) da laje. Nestas tabelas, Ap significa apoio.

**Tabela 1 – Coeficiente  $k_2$  para relação  $g/p = 1,00$ .**

N	2	3	4	5	6	7
Vão 1	14,22	12,50	12,96	12,84	12,81	12,78
Ap A	-8,00	-10,00	-9,33	-9,50	-9,50	-9,49
Vão 2	14,22	40,00	27,51	30,08	29,80	29,49
Ap B		-10,00	-14,00	-12,67	-12,66	-12,65
Vão 3		12,50	27,51	21,71	21,63	21,56
Ap C			-9,33	-12,67	-12,28	-11,89
Vão 4			12,96	30,08	21,63	23,75
Ap D				-9,50	-12,66	-11,89
Vão 5				12,84	29,80	21,56
Ap E					-9,50	-12,65
Vão 6					12,81	29,49
Ap F						-9,49
Vão 7						12,78

**Tabela 2 – Coeficiente  $k_2$  para relação  $g/p = 0,90$ .**

N	2	3	4	5	6	7
Vão 1	13,76	12,19	12,61	12,50	12,64	12,78
Ap A	-8,00	-9,84	-9,22	-9,37	-9,42	-9,48
Vão 2	13,76	33,33	24,54	26,45	27,97	29,49
Ap B		-9,84	-13,33	-12,17	-12,41	-12,65
Vão 3		12,19	24,54	20,00	20,78	21,56
Ap C			-9,22	-12,17	-12,02	-11,88
Vão 4			12,61	26,45	20,78	23,75
Ap D				-9,37	-12,41	-11,88
Vão 5				12,50	27,97	21,56
Ap E					-9,42	-12,65
Vão 6					12,64	29,49
Ap F						-9,48
Vão 7						12,78

**Tabela 3 – Coeficiente  $k_2$  para relação  $g/p = 0,80$ .**

N	2	3	4	5	6	7
Vão 1	13,32	11,90	12,28	12,18	12,48	12,78
Ap A	-8,00	-9,68	-9,11	-9,25	-9,36	-9,48
Vão 2	13,32	28,57	22,14	23,59	26,54	29,49
Ap B		-9,68	-12,73	-11,71	-12,17	-12,65
Vão 3		11,90	22,14	18,54	21,85	21,56
Ap C			-9,11	-11,71	-12,17	-11,88
Vão 4			12,28	23,59	21,85	23,75
Ap D				-9,25	-12,17	-11,88
Vão 5				12,18	26,54	21,56
Ap E					-9,36	-12,65
Vão 6					12,48	29,49
Ap F						-9,48
Vão 7						12,78

**Tabela 4 – Coeficiente  $k_2$  para relação  $g/p = 0,70$ .**

N	2	3	4	5	6	7
Vão 1	12,90	11,61	11,96	11,87	11,87	11,88
Ap A	-8,00	-9,52	-9,00	-9,13	-9,13	-9,13
Vão 2	12,90	25,00	20,17	21,29	21,30	21,32
Ap B		-9,52	-12,17	-11,28	-11,28	-11,28
Vão 3		11,61	20,17	17,27	17,27	17,28
Ap C			-9,00	-11,28	-11,08	-10,84
Vão 4			11,96	21,29	17,27	18,48
Ap D				-9,13	-11,28	-10,84
Vão 5				11,87	21,30	17,28
Ap E					-9,13	-11,28
Vão 6					11,87	21,32
Ap F						-9,13
Vão 7						11,88

**Tabela 5 – Coeficiente  $k_2$  para relação  $g/p = 0,60$ .**

N	2	3	4	5	6	7
Vão 1	12,50	11,34	11,65	11,57	11,57	11,58
Ap A	-8,00	-9,37	-8,89	-9,01	-9,01	-9,01
Vão 2	12,50	22,22	18,53	19,40	19,38	19,35
Ap B		-9,37	-11,67	-10,89	-10,89	-10,89
Vão 3		11,34	18,53	16,17	16,16	16,16
Ap C			-8,89	-10,89	-10,69	-10,50
Vão 4			11,65	19,40	16,16	17,13
Ap D				-9,01	-10,89	-10,50
Vão 5				11,57	19,38	16,16
Ap E					-9,01	-10,89
Vão 6					11,57	19,35
Ap F						-9,01
Vão 7						11,58

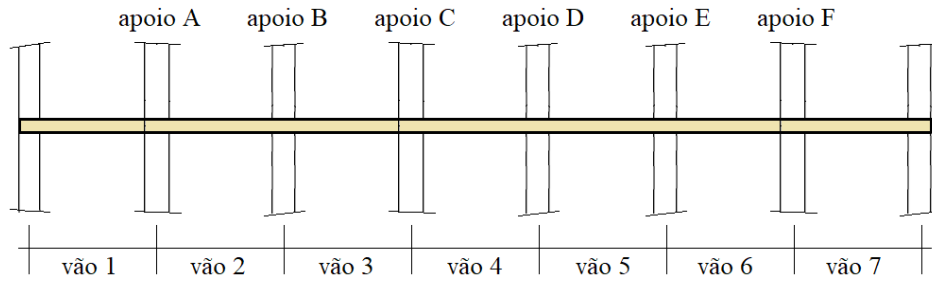
**Tabela 6 – Coeficiente  $k_2$  para relação  $g/p = 0,50$ .**

N	2	3	4	5	6	7
Vão 1	12,12	11,07	11,36	11,28	11,28	11,28
Ap A	-8,00	-9,23	-8,78	-8,89	-8,89	-8,89
Vão 2	12,12	20,00	17,12	17,82	17,78	17,75
Ap B		-9,23	-11,20	-10,52	-8,89	-10,52
Vão 3		11,07	17,12	15,20	15,19	15,18
Ap C			-8,78	-10,52	-10,34	-10,15
Vão 4			11,36	17,82	15,19	15,97
Ap D				-8,89	-8,89	-10,15
Vão 5				11,28	17,78	15,18
Ap E					-8,89	-10,52
Vão 6					11,28	17,75
Ap F						-8,89
Vão 7						11,28

**Tabela 7 – Coeficiente  $k_2$  para relação  $g/p = 0,40$ .**

N	2	3	4	5	6	7
Vão 1	11,75	10,82	11,07	11,00	10,99	10,98
Ap A	-8,00	-9,09	-8,68	-8,78	-8,78	-8,78
Vão 2	11,75	18,18	15,92	16,48	16,51	16,53
Ap B		-9,09	-10,77	-10,17	-10,17	-10,17
Vão 3		10,82	15,92	14,34	14,34	14,35
Ap C			-8,68	-10,17	-9,98	-9,80
Vão 4			11,07	16,48	14,34	15,02
Ap D				-8,78	-10,17	-9,80
Vão 5				11,00	16,51	14,35
Ap E					-8,78	-10,17
Vão 6					10,99	16,53
Ap F						-8,78
Vão 7						10,98

Na Figura 3, pode-se observar um corte da seção transversal de uma laje lisa protendida, no qual são exemplificados os vãos e apoios adotados na primeira coluna das Tabelas 1 a 7.



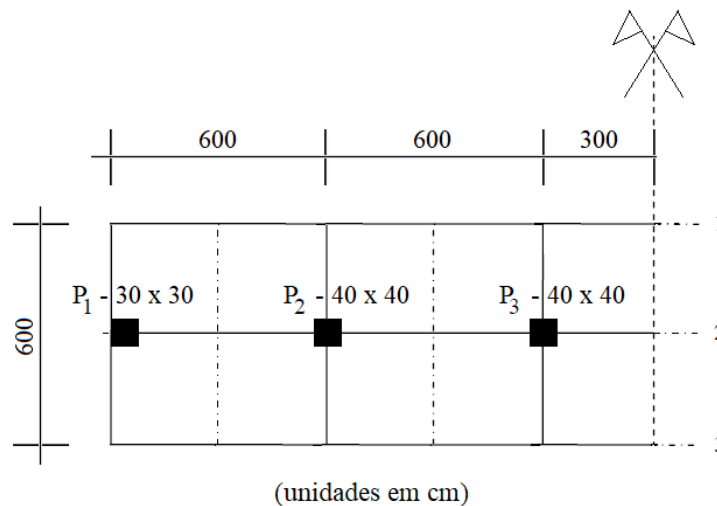
**Figura 3 – Exemplificação de vãos e apoios ao longo de uma laje lisa protendida.**

### Exemplo de Aplicação

Neste trabalho, desenvolveu-se um exemplo simplificado com o objetivo de comparar os resultados oriundos da modelagem em programa baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF), realizada por BHATT (2011), aos obtidos segundo a Equação 1 utilizada por THOMAZ (2022).

O exemplo simplificado consistiu em uma faixa de pavimento de laje lisa protendida retangular com 5 vãos simétricos de 600 cm de comprimento, na horizontal, com 300 cm de pé-direito, cujas linhas que formam seu perímetro possuem força cortante nula. Tal faixa foi retirada de pavimento de laje lisa protendida quadrada com 5 vãos simétricos de 600 cm de comprimento, tanto na vertical quanto na horizontal.

A faixa de laje tinha 20 cm de espessura e foi apoiada em 6 pilares, sendo 4 pilares intermediários de 40 cm x 40 cm de dimensões e 2 pilares de extremidade de 30 cm x 30 cm de dimensões, como mostra a Figura 4.



**Figura 4 – Faixa de pavimento de laje lisa protendida avaliado neste estudo.**

O concreto da laje pertencia à classe C30, cujos valores de resistência característica à compressão  $f_{ck}$ , módulo de elasticidade  $E_{ci}$ , módulo de deformação secante  $E_{cs}$  e resistência característica à compressão na idade de protensão  $f_{ckj}$  eram iguais a 30 MPa, 34,5 GPa, 32,8 GPa e 25 MPa, nesta ordem.

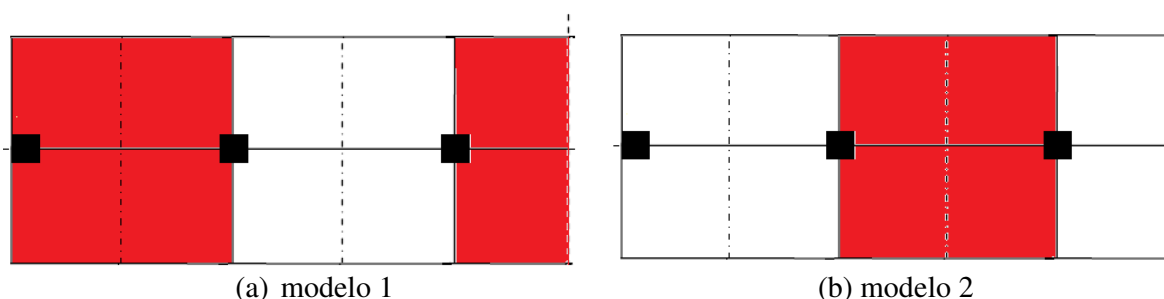
No projeto da laje foi utilizada armadura ativa composta por monocordoalhas de 13 mm de diâmetro com 1860 MPa de resistência à tração. Adotou-se 25 kN/m<sup>3</sup> para o peso específico do concreto protendido.

O valor de carga acidental q adotada para a laje foi igual 4,00 kN/m<sup>2</sup>. Neste valor embutiu-se o valor de carga permanente de revestimento.

Como a carga de peso próprio  $g_{pp}$  da laje de 20 cm de espessura é igual a 5,00 kN/m<sup>2</sup>, a carga total p sobre a laje é igual a 9,00 kN/m<sup>2</sup>.

Tendo sido calculados os valores de carga permanente g e de carga total p, chega-se ao valor da relação entre a carga permanente e a carga total g/p igual a 0,56.

BHATT (2011) simulou 2 tipos de modelos de carga acidental sobre a laje, cujo esboço encontra-se na Figura 5. No modelo 1, adotaram-se 2 faixas verticais (1 faixas de extremidade de 6 m de largura e 1 faixa intermediária de 3 m de largura), enquanto no modelo 2, 1 faixa vertical intermediária de 6 m de largura.



**Figura 5 – Modelos de carregamento (BHATT, 2011).**

### Resultados e Análise

A Tabela 8 agrupa os valores de momentos fletores máximos positivo e negativo na direção x (direção horizontal da planta) encontrados por BHATT (2011) na seção ao longo das linhas dos pilares, após modelagem da laje (v. Figura 4) com o uso de um programa baseado no MEF.

Ressalta-se que esses valores de momentos fletores máximos foram obtidos carregando-se totalmente a laje com a carga permanente de 5,00 kN/m<sup>2</sup> e parcialmente a laje com a carga acidental de 4,00 kN/m<sup>2</sup>, conforme modelos da Figura 5.

**Tabela 8 – Momentos fletores (em kN.m/m) da laje encontrados por BHATT (2011).**

Modelo	Apoio	Vão 1	Apoio A	Vão 2	Apoio B	Vão 3
1	5,0	30,0	-90,0	0,0	-75,0	20,0
2	3,0	12,0	-90,0	20,0	-75,0	3,0

Em se tratando do carregamento do modelo 1 (v. Figura 5a), o valor do coeficiente  $k_1$ , para cálculo do momento fletor máximo positivo no vão entre apoios ao longo da faixa localizada nos apoios (cor amarela da Figura 2), é igual a 1,25.

De acordo com as Tabelas 5 e 6, para o número de vãos igual a 5 e nos vãos 1 e 3, os valores do coeficiente  $k_2$  são 11,57 e 16,17 para relação  $g/p = 0,60$ , e 11,28 e 15,20 para  $g/p = 0,50$ . Como a relação  $g/p$ , para a faixa de laje deste trabalho, é igual a 0,56, os valores do coeficiente  $k_2$ , a partir de interpolação linear, para os vãos 1 e 3 são 11,45 e 15,78.

Da Equação 1, os valores máximos de momento fletor positivo  $M_{\text{máx}}^+$  nos vãos 1 e 3 ao longo da faixa localizada nos apoios, para a carga total  $p$  na laje de  $9,00 \text{ kN/m}^2$ , são iguais a  $35,4 \text{ kN.m/m}$  e  $25,7 \text{ kN.m/m}$ , respectivamente.

De acordo com a Figura 2, o valor do coeficiente  $k_1$  para cálculo do momento fletor máximo negativo distribuído na linha dos apoios até 10% do vão ao longo da faixa localizada nos apoios (cor amarela) é igual a 2,10.

A partir das Tabelas 5 e 6, para o número de vãos igual a 5 e nos apoios A e B, os valores do coeficiente  $k_2$  são  $-9,01$  e  $-10,89$  para relação  $g/p = 0,60$ , e  $-8,89$  e  $-10,52$  para relação  $g/p = 0,50$ . Como a relação  $g/p$ , para a faixa de laje deste trabalho, é igual a  $0,56$ , os valores do coeficiente  $k_2$ , a partir de interpolação linear, nos apoios A e B são  $-8,96$  e  $-10,74$ .

Então, utilizando-se a Equação 1, os valores máximos de momento fletor negativo  $M_{\text{máx}}^-$  na linha dos apoios A e B até 10% do vão ( $l = 6 \text{ m}$ ) ao longo da faixa localizada nos apoios A e B, para a carga total  $p$  na laje de  $9,00 \text{ kN/m}^2$ , são iguais a  $-75,9 \text{ kN.m/m}$  e  $-63,4 \text{ kN.m/m}$ .

Com relação ao carregamento do modelo 2, o valor máximo de momento fletor positivo  $M_{\text{máx}}^+$  no vão 2 ao longo da faixa localizada nos apoios, para os valores de  $k_1$ ,  $k_2$  e  $p$  iguais a  $1,25$ ,  $18,77$  e  $9,00 \text{ kN/m}^2$ , é igual a  $21,6 \text{ kN.m/m}$ , de acordo com a Equação 1.

Os valores máximos de momento fletor negativo  $M_{\text{máx}}^-$  na linha dos apoios A e B até 10% do vão ( $l = 6 \text{ m}$ ) ao longo da faixa localizada nos apoios A e B, utilizando-se a Equação 1, para a carga total  $p$  na laje de  $9,00 \text{ kN/m}^2$ , o coeficiente  $k_1$  de  $2,10$  e os coeficientes  $k_2$  de  $-8,96$  no apoio A e de  $-10,74$  no apoio B, são iguais a  $-75,9 \text{ kN.m/m}$  e  $-63,4 \text{ kN.m/m}$ , nesta ordem.

A Tabela 9 apresenta uma comparação entre os momentos fletores máximos positivos e negativos obtidos por BHATT (2011), com uso de programa baseado em MEF, e por THOMAZ (2022), por meio de tabelas simplificadas, de cada seção ao longo da laje.

Na Tabela 9, a primeira linha corresponde às seções da Figura 3. A primeira coluna refere-se à faixa localizada nos apoios (faixa apoio), de acordo com o mostrado na Figura 2.

**Tabela 9 – Momentos fletores máximos na laje em kN.m/m.**

Faixa	Apoio	Vão 1	Apoio A	Vão 2	Apoio B	Vão 3	
Modelo 1							
faixa apoio	BHATT	-	30,0	-90,0	-	-75,0	20,0
	THOMAZ	-	35,4	-75,9	-	-63,4	25,7
	$\Delta$ (%)	-	18,0	-15,6	-	-15,5	28,5
Modelo 2							
faixa apoio	BHATT	-	-	-90,0	20,0	-75,0	-
	THOMAZ	-	-	-75,9	21,6	-63,4	-
	$\Delta$ (%)	-	-	-15,6	8,0	-15,5	-

Constata-se da Tabela 9 que os maiores valores de momento fletor máximo positivo ocorreram no vão 1 na faixa localizada nos apoios (modelo 1), enquanto os menores valores, nos vãos 2 e 3 (modelos 1 e 2, nesta ordem).

Os valores de momento fletor máximo positivo nos vãos 1, 2 e 3, obtidos por meio do método simplificado de THOMAZ (2022), foram em média  $18,0\%$ ,  $8,0\%$  e  $28,5\%$  superiores aos encontrados com o uso do MEF por BHATT (2011).



De acordo com a Tabela 9, os maiores valores de momento fletor máximo negativo aconteceram no apoio A para os modelos 1 e 2. Em contrapartida, os menores valores deste momento fletor, no apoio B.

Os valores de momento fletor máximo negativo nos apoios A e B, obtidos por meio do método simplificado de THOMAZ (2022), foram em média 15,6% e 15,5% abaixo dos encontrados com o uso do MEF por BHATT (2011).

### **Conclusões**

Este trabalho apresentou um método proposto por THOMAZ (2022), que tem por fundamento tabelas originadas a partir do estudo de DUDDECK e AHRENS (1994) e do Comitê Alemão de Concreto Armado (DAfStb HEFT 631, 2019).

A partir do estudo da modelagem de um pavimento de faixa de laje lisa protendida realizada por BHATT (2011), que utilizou um programa baseado MEF e obteve valores dos momentos fletores máximos positivos e negativos desta, foi feita uma comparação entre estes valores com os encontrados por THOMAZ (2022).

Os valores de momentos fletores máximos positivos, segundo o método simplificado de THOMAZ (2022), foram em média cerca de 18,2% superiores aos obtidos com o uso do programa baseado no MEF por BHATT (2011). Em contrapartida, os valores de momentos fletores máximos negativos foram 15,6% inferiores. Isto ocorreu pelo fato da região em apoios de laje lisas protendidas ser uma região de alta concentração de tensões, o que leva a valores elevados de momentos fletores oriundos de análise via MEF.

Concluiu-se que o método proposto por THOMAZ (2022) é conservador e muito prático para se utilizar no dimensionamento de lajes lisas protendidas.

### **Referências**

- ALLEN, E.; IANO, J. Fundamentos da Engenharia de Edificações: Materiais e Métodos. Bookman Editora Ltda., 5a Edição, Porto Alegre, Brasil, 2013.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimentos. ABNT NBR 6118. Rio de Janeiro, Brasil, 2014.
- BHATT, P. Prestressed Concrete Design to Eurocodes. Taylor & Francis Group, USA, 2011.
- DAfStb HEFT 631. Hilfsmittel zur Schnittgrößenermittlung und zu besonderen Detailnachweisen bei Stahlbetontragwerken. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton – DafStb, Berlin, 2019.
- DUDDECK, H.; AHRENS, H. Statik der Stabtragwerke. Beton-Kalender, Teil I, Berlin, 1984.
- THOMAZ, E. C. S. Notas de aula sobre Concreto Protendido. IME, Rio de Janeiro, Brasil, 2022.