

Repartição Transversal de Cargas em Pontes com Vigas Múltiplas do Tipo Calha **Matheus de Souza Lopes¹, Ricardo Valeriano Alves², Flávia Moll de Souza³**

¹matheusdesouzalopes16@poli.ufrj.br

²valeriano@poli.ufrj.br

³flaviamoll@poli.ufrj.br

Resumo

A distribuição de cargas em pontes tem sido amplamente estudada ao longo das décadas, tornando-se um tema cada vez mais relevante diante de novos modelos e arranjos estruturais. A correta avaliação da repartição das cargas na superestrutura é fundamental para garantir a segurança, a eficiência e a economia das obras, sendo um aspecto essencial no dimensionamento de pontes. Métodos convencionais, como o proposto por Courbon, são amplamente utilizados devido à sua simplicidade e precisão na análise da distribuição transversal de cargas em superestruturas de seção aberta. No entanto, sua aplicação é válida apenas sob a hipótese de que a rigidez à torção das vigas seja desprezível, o que o torna limitado. No caso de superestruturas compostas por vigas do tipo Calha, que apresentam elevada rigidez torsional, as premissas do Método de Courbon deixam de ser adequadas, tornando necessário o emprego de abordagens mais sofisticadas. Nessas estruturas, a torção da superestrutura é resistida por dois mecanismos distintos: a torção de Saint-Venant e a torção de empenamento, os quais influenciam diretamente a forma como as cargas são distribuídas entre as vigas. Métodos alternativos para esse caso, embora mais acurados, são pouco práticos e exigem resoluções complexas. Diante disso, este estudo utiliza modelos numéricos avançados baseados no método dos elementos finitos para avaliar a repartição de cargas em superestruturas compostas por duas, três, quatro e cinco vigas de alta rigidez torsional, propondo ajustes nas curvas de distribuição originalmente formuladas por Courbon.

Palavras-chave

Pontes em vigas múltiplas; Vigas Calhas; Repartição de Cargas; Método de Courbon; Superestrutura de Pontes.

Introdução

Este trabalho tem como base o Projeto Final de Graduação do autor¹, desenvolvido durante seu estágio na empresa Casagrande Engenharia. Nesse período, foi possível utilizar os softwares *SAP2000* e *CSi Bridge* para a elaboração de diversos modelos computacionais, com o objetivo de estudar o comportamento da distribuição transversal de cargas em superestruturas de pontes compostas por múltiplas vigas do tipo calha. A obtenção da repartição real de carregamentos é de complexa formulação e seu comportamento não é linear, o que torna a quantificação dos efeitos de flexão e torção difíceis de serem obtidos. No presente estudo, pôde-se estimá-los e apresentar uma teoria simplificada e sólida, para a modificação do método de Courbon.

Método de Courbon

O método de Courbon para a repartição transversal de cargas em superestruturas parte do pressuposto de que as cargas são distribuídas entre as várias vigas da estrutura de maneira não-uniforme, em função da rigidez e do deslocamento de cada uma destas e de suas deformações. Suas hipóteses dedutivas compreendem que as transversinas sejam indeformáveis, a dimensão do vão é superior à largura do tabuleiro, ao menos da ordem de 15/6, as vigas não possuem rigidez à torção e a seção a ser analisada se situa no mesmo plano das transversinas.

A equação geral definida por Courbon permite obter os Coeficientes de Repartição Transversal (CRT) para cada uma das vigas, considerando-se uma carga unitária aplicada sobre a superestrutura, como apresentado a seguir:

$$CRT_{i,j} = \frac{1}{n} + \frac{\rho_i}{\sum \rho_i^2} \cdot e \quad (1)$$

sendo,

n : número de vigas;

ρ_i : abscissa da i -ésima viga ao centro geométrico da superestrutura;

e : abscissa de uma carga P aplicada sobre a transversina;

Define-se $CRT_{i,j}$, a parcela de carregamento na viga i , devido a aplicação da carga unitária sobre a viga j . A Figura 1 exemplifica esta definição para um sistema composto por quatro vigas.

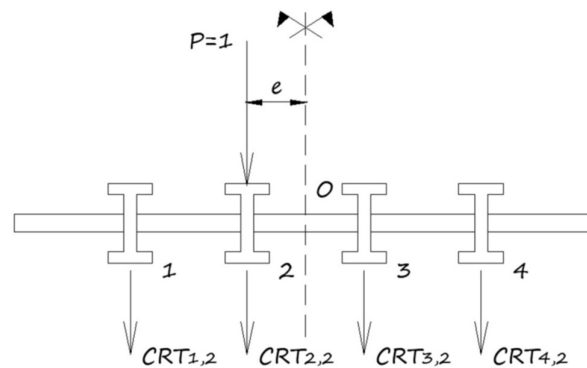


Figura 1 – CRTs para superestrutura em 4 vigas

Os resultados obtidos por meio da equação (1) evidenciam que as vigas mais carregadas são aquelas que se situam mais afastadas da origem e que estão do mesmo lado de aplicação da carga P , ou seja, as vigas de extremidade vizinhas ao carregamento.

Considerações acerca do método

O método, embora amplamente empregado até os dias atuais, apresenta limitações, especialmente em suas hipóteses dedutivas e, conseqüentemente, em seus resultados. Ao desconsiderar a rigidez à torção das vigas e admitir que o conjunto de vigas e transversina sofram uma rotação de corpo rígido na seção de análise, obtém-se uma distribuição linear de carregamento, devido à carga P . Por outro lado, ao utilizar vigas com alta rigidez à torção, como as do tipo calha, essa distribuição torna-se não linear, pois nenhuma das hipóteses mencionadas pode ser garantida. Tem-se que a rigidez à torção empregada à superestrutura impede o seu empenamento, causando efeitos de torção que serão discutidos brevemente neste trabalho.

Outros métodos de repartição de carregamentos permitem avaliar a superestrutura quanto à sua rigidez à torção e compreendem seus efeitos quando na obtenção dos CRTs. Podem ser citados: *Guyon-Massonet* e *Homberg-Trenks*. Contudo, suas soluções são pouco práticas e exigem resoluções complexas.

Torção em Superestruturas de Pontes

A correta solução para as equações que descrevem o comportamento de barras não circulares submetidas à torção foram obtidas por Saint-Venant, no entanto, a compreensão plena do fenômeno da torção só se consolidou com a teoria de Vlasov, para barras de seção aberta. A Figura 2 mostra a ocorrência das duas torções.

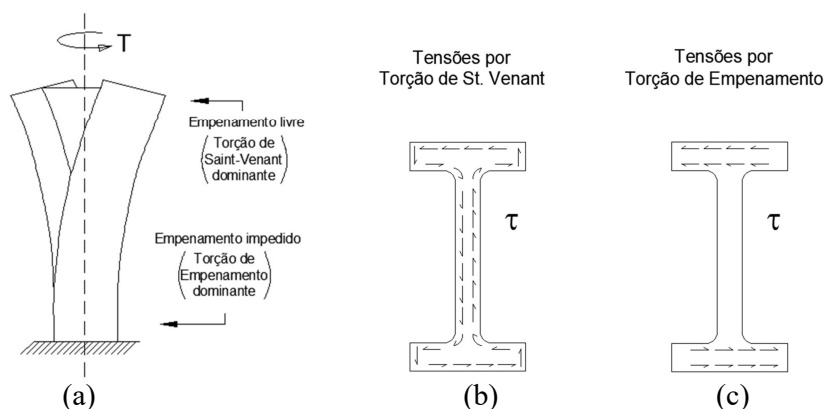


Figura 2 – Torção de Saint-Venant e Vlasov

A torção de Saint-Venant predomina em seções fechadas, caracterizando um fluxo de tensões uniforme (Figura 2.b). Já a torção de Vlasov (ou empenamento) é mais relevante em seções abertas, resultando em um fluxo de tensões não uniforme (Figura 2.c). Ainda, na Figura 2.a, observa-se que as mesas do perfil, sob torção, são fletidas em sentidos opostos, caracterizando solicitações de flexão. Este mesmo efeito é observado em pontes de seção aberta, como na Figura 3.

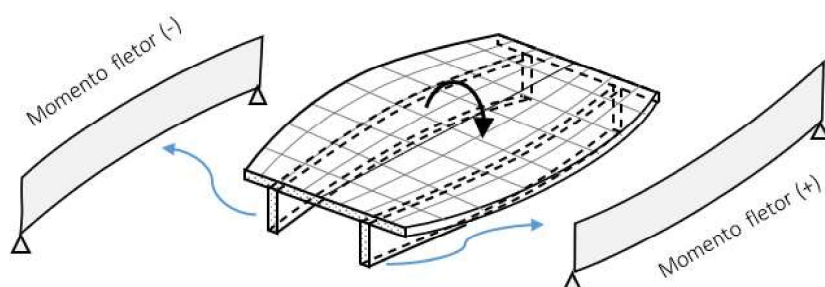


Figura 3 – Flexão gerada pela torção da superestrutura aberta (VALERIANO, 2021)

Com o uso das vigas calhas, em substituição as vigas “I”, o empenamento da seção é menor, por consequência, a flexão das vigas é menor. Deste modo, a absorção da torção é combinação dos efeitos da torção de Saint-Venant e de Vlasov.

É conhecido que elementos de concreto armado percam sua rigidez à torção devido ao aparecimento de fissuras. No entanto, esta é garantida quando da existência de armaduras ativas, sendo seu nível de protensão limitada ou completa, conforme NBR 6118:2023.

Proporções de flexão (ζ) e de torção (θ)

Para compreensão desta combinação de efeitos, são considerados os modelos em grelhas ilustrados na Figura 4.

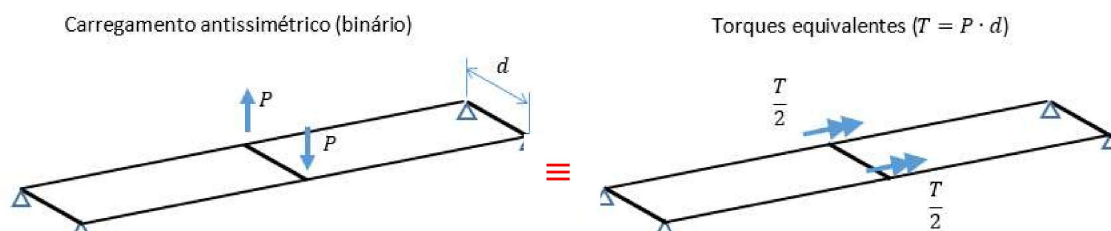


Figura 4 – Modelo de grelhas sob carregamento antissimétrico e torques equivalentes (VALERIANO, 2021)

O carregamento antissimétrico possui sistema equivalente de cargas na forma de momentos torsores de mesma intensidade para cada uma das vigas. Embora equivalentes, os sistemas despertam solicitações

conceitualmente distintas: flexão e torção. Tomando-se, inicialmente, o caso limite, no qual as vigas possuem rigidez à torção desprezível, o torque $T = P \cdot d$ é absorvido unicamente por flexão nas vigas. Por outro lado, à medida que a rigidez à torção das vigas cresce, uma parcela do torque aplicado é absorvida por torção. A combinação destes efeitos é representada na Figura 5.

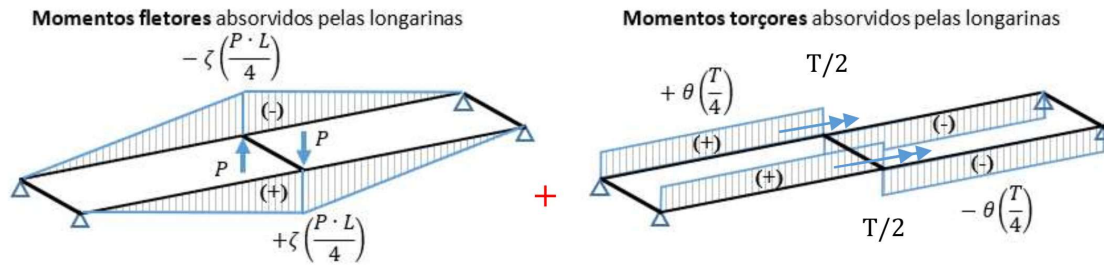


Figura 5 – Mecanismos de absorção de torque (VALERIANO, 2021)

Sendo,

$\zeta \cdot T$: parcela de torque aplicado que é absorvido por flexão das vigas em sentidos opostos;

$\theta \cdot T$: parcela de torque aplicado que é absorvido por torção da seção das vigas.

A proporção ζ representa a parcela do torque total aplicado que é absorvida por flexão das vigas e a proporção θ a parcela absorvida por torção das vigas. Esses dois coeficientes, quando somados, resultam no unitário. Estes coeficientes são dependentes da relação entre rigidez torsional ($G \cdot J$) e rigidez flexional ($E \cdot I$), conforme representado esquematicamente na Figura 6.

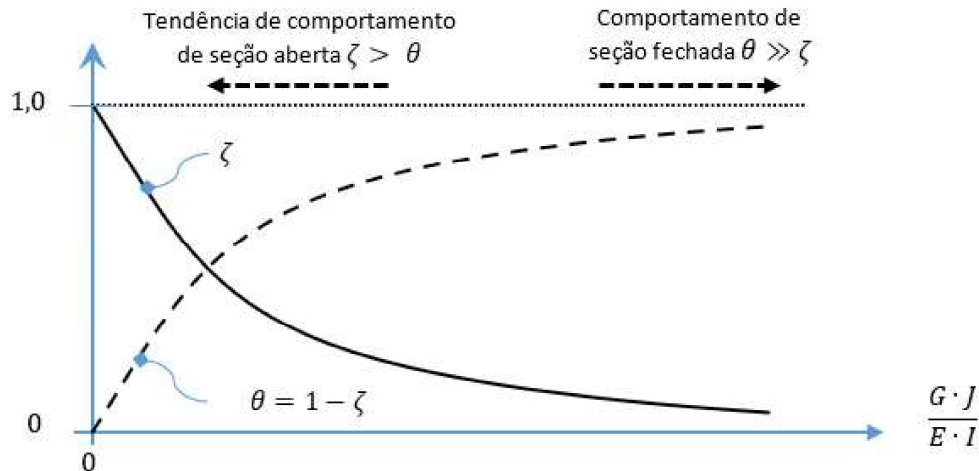


Figura 6 – Aspecto típico da variação das proporções ζ e θ (VALERIANO, 2021)

Na Figura 6, têm-se as seguintes notações para a seção das vigas:

G : módulo de elasticidade transversal;

E : módulo de elasticidade longitudinal;

J : constante de torção;

I : momento de segunda ordem de área (“inércia”).

O método de Courbon corresponde a admitir um valor para ζ unitário e θ nulo.

A quantificação destas proporções foi proposta por VALERIANO (2021), que considera os efeitos, separadamente, de um sistema composto por carga centrada e por momento (binário equivalente). Para isto, foram consideradas, para a seção transversal com transversina, as hipóteses de translação e rotação de corpo rígido sob a aplicação dos dois sistemas de carregamento. Os resultados são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – $CRT_{i,j}$ em função da proporção ζ .

Número de vigas		$CRT_{1,j}$	a_0	$CRT_{1,j} (\zeta = 1)$
2 vigas	j = 1	$(1 + \zeta)/2$	0,500	1,000
	j = 2	$(1 - \zeta)/2$	-0,500	0,000
3 vigas	j = 1	$(2 + 3\zeta)/6$	0,500	0,833
	j = 2	1/3	0,000	0,333
	j = 3	$(2 - 3\zeta)/6$	-0,500	-0,167
4 vigas	j = 1	$(5 + 9\zeta)/20$	0,450	0,700
	j = 2	$(5 + 3\zeta)/20$	0,150	0,400
	j = 3	$(5 - 3\zeta)/20$	-0,150	0,100
	j = 4	$(5 - 9\zeta)/20$	-0,450	-0,200
5 vigas	j = 1	$(2 + 4\zeta)/10$	0,400	0,600
	j = 2	$(2 + 2\zeta)/10$	0,200	0,400
	j = 3	1/5	0,000	0,200
	j = 4	$(2 - 2\zeta)/10$	-0,200	0,000
	j = 5	$(2 - 4\zeta)/10$	-0,400	-0,200

Sendo,

a_0 : coeficiente angular nas equações $CRT_{1,j}$.

Os resultados apresentados na Tabela 1 permitem construir distribuições transversais de carregamento lineares, em conformidade com as hipóteses consideradas de translação e rotação de corpo rígido para a seção de análise (Método de Courbon). No entanto, são esperadas, para o carregamento transversal, distribuições não lineares.

Diante dessa diferença, devem ser obtidos valores de proporção ζ que minimizem os erros, aproximando a distribuição linear “fictícia” da solução real e não linear.

Para isto, são obtidas as curvas reais de distribuição transversal de flexão de 72 modelos desenvolvidos pelo *software SAP2000*, baseado no Método dos Elementos Finitos.

Curvas Reais de Distribuição Transversal de Carregamento

Conforme proposto por VALERIANO (2021), as principais variáveis que influem no comportamento da distribuição de carregamento transversal são:

- Relação entre rigidez à torção ($G \cdot J$) e a rigidez à flexão das longarinas ($E \cdot I$), tal que:

$$\text{Razão entre rijezas} = \frac{G \cdot J}{E \cdot I} \quad (2)$$

- Relação entre inércias das transversinas (I_{transv}) e das longarinas (I);
- Relação entre as constantes de torção das transversinas (J_{transv}) e das longarinas (J);
- Relação entre a distância entre vigas de bordo (d) e o comprimento do vão (L), tal que:

$$\text{Razão entre comprimentos} = \frac{d}{L} \quad (3)$$

Por simplicidade, para as relações dos itens (b) e (c), admite-se que estas mantenham as mesmas proporções, independentemente do tipo de longarina analisada, representadas pelo parâmetro ξ , como a seguir:

$$\xi = \frac{J_{transv}}{J} \approx \frac{I_{transv}}{I} \quad (4)$$

Nos modelos realizados foram utilizadas as vigas calhas U54, padronizadas pelo Manual de Pontes do PCI - *Precast/Prestressed Concrete Institute*, variando-se apenas o comprimento da mesa colaborante, de acordo com a NBR 6118:2023. O resumo das propriedades médias das longarinas é apresentado na Tabela 2.

Tabela 2 – Resumo das propriedades médias das longarinas

Média	$J (m^4)$	$I (m^4)$	GJ/EI	$I_{transv} (m^4)$	ξ
	0,5366	0,3676	0,6082	0,0288	0,0786

Deste modo, todas as curvas obtidas são calibradas para as propriedades apresentadas. Variando-se o número de vigas de 2 a 5, a distância entre vigas (λ) de 2,50m, 3,50m e 4,50m e o comprimento do vão (L) de 15m, 20m, 25m, 30m, 35m e 40m, são definidos todos os modelos da análise.

A seção padrão para os modelos estudados é apresentada na Figura 7. A dimensão do balanço é fixa, igual a 2,0m, respeitando os valores recomendados por M. RALLS (1993) e por EL DEBS (2021). A face da roda externa do trem tipo foi encostada na barreira e seu eixo foi afastado 1,35m do eixo da viga de bordo. Para construção do modelo computacional, foram utilizados elementos de barras para as vigas e transversinas, cascas para as lajes. Em adição, para as ligações entre as nervuras das vigas calhas e as lajes, foram utilizados vínculos rígidos. Foram consideradas transversinas de apoio e uma transversina de meio de vão. A carga aplicada foi concentrada sobre cada alma das vigas calhas. Na Figura 7, N_v corresponde ao número de vigas na seção.

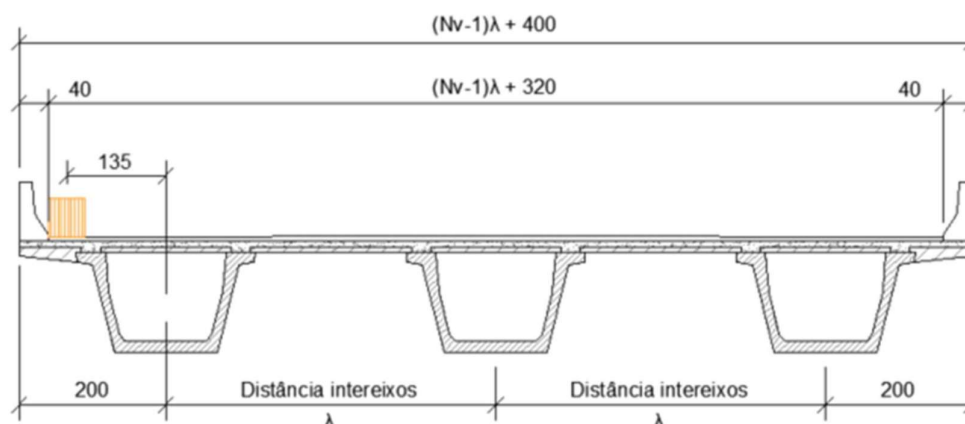


Figura 7 – Seção transversal padrão (cotas em centímetros)

Variando-se a posição da carga concentrada na superestrutura, observaram-se os efeitos desta na viga de bordo, considerada a mais carregada. Destaca-se que, a obtenção dos CRTs ocorreu por meio dos resultados de momentos fletores de meio de vão, para cada uma das vigas, definindo desta forma valores de distribuição transversal correspondentes à flexão.

O CRT de cada viga é igual ao valor médio entre as almas esquerda e direita da viga calha.

São apresentadas, na Figura 8, as curvas de distribuição transversal reais para os modelos M67 a M72, que se referem a modelos de cinco vigas.

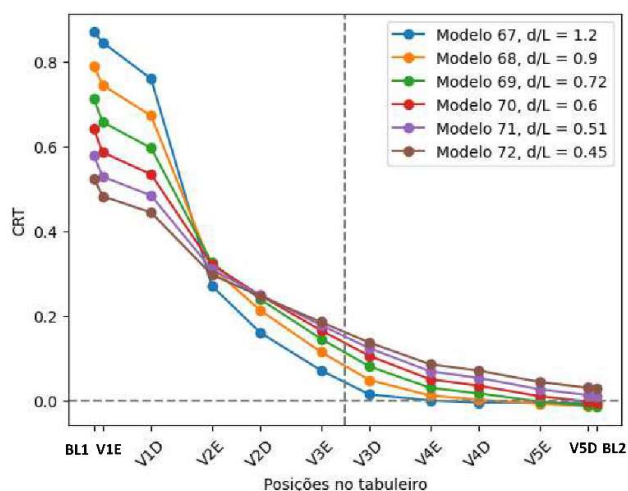


Figura 8 – Distribuição transversal de carregamento (M67 a M72) – cinco vigas

Mediante o estudo dos CRTs de cada modelo elaborado, foram propostos valores de proporção ζ que aproximem uma distribuição transversal de cargas linear ao seu comportamento real, não linear. Para isso, foi desenvolvido o conceito da proporção de flexão média (ζ_m), apresentado a seguir. Ademais, com o objetivo de melhorar a precisão desta aproximação, propõe-se uma leve modificação nas equações de VALERIANO (2021) na Tabela 1, substituindo o coeficiente linear das distribuições pelo parâmetro V_m , também descrito a seguir.

Proporção de Flexão Média (ζ_m)

Os coeficientes de repartição transversal são compostos pelos sistemas de força de carga centrada e do binário. Neste caso, o primeiro sistema possui valores de ordenadas iguais à média dos CRT obtidos dos modelos desenvolvidos no *SAP2000* (exclusa a viga de centro), e o segundo sistema é multiplicado pelo proporção de flexão média (ζ_m). A Figura 9 mostra a definição deste novo conceito, para três vigas.

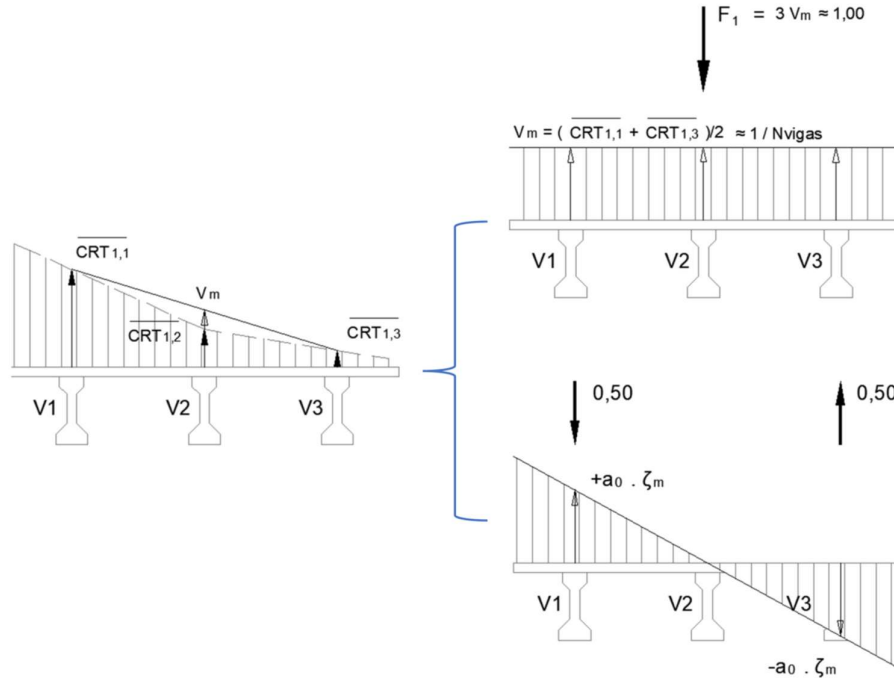


Figura 9 – CRT em função de (ζ_m), para três vigas

Na Figura 9, têm-se as seguintes notações:

$\overline{CRT}_{1,j}$: Coeficiente de repartição transversal do *SAP2000*, obtido computacionalmente;

V_m : valor médio dos $\overline{CRT}$, exclusiva a viga central (coeficiente linear modificado);

a_0 : coeficiente angular multiplicador da equação original (Tabela 1).

Propõe-se que as equações sejam alteradas da seguinte forma (exceto para viga central):

$$CRT_{1,j} = V_m + a_0 \cdot \zeta_m \quad (5)$$

Para a viga central, tem-se:

$$CRT_{1,j} = V_m \quad (6)$$

A proporção de flexão média (ζ_m) é calculada por meio da média dos valores de proporção para cada uma das vigas, excluindo-se a viga de centro, quando houver:

$$\zeta_{1,j} = \frac{|\overline{CRT}_{1,j} - V_m|}{a_0} \quad (7)$$

A média é dada por:

$$\zeta_m = \frac{\sum \zeta_{1,j}}{N_v'} \quad (8)$$

Sendo,

N_v' : número de vigas utilizadas para o cálculo da média.

Por fim, a reta que define a aproximação da distribuição é composta pelas equações (5) e (6), uma vez que são definidos os valores de V_m e ζ_m .

Usando os resultados dos modelos elaborados, desenvolveram-se as curvas apresentadas na Figura 10.

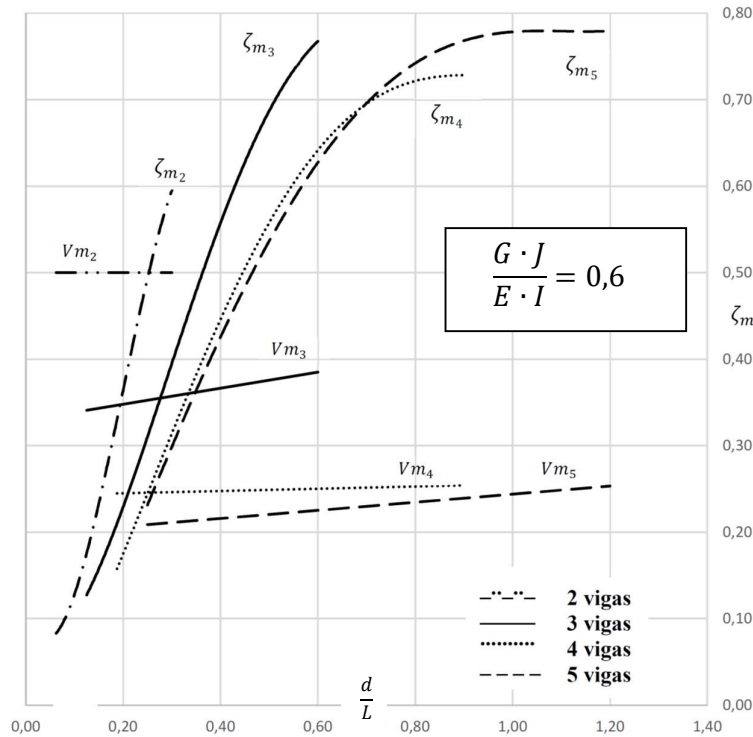


Figura 10 – Proporção de flexão média (ζ_m) e coeficiente linear modificado (V_m)

A partir da Figura 10 é possível obter a linha de influência para a viga de bordo (V_1), de superestruturas de duas a cinco vigas. As equações que regem os CRT possuem coeficiente linear dado por V_m , enquanto o coeficiente angular é mantido idêntico ao das equações da Tabela 1 e, por fim, a proporção de flexão média (ζ_m) permite calcular a parcela de carga excêntrica que é absorvida por flexão das vigas. Para avaliação das curvas obtidas, Figura 10, foram desenvolvidos quatro modelos complexos no *CSi Bridge, software* especializado em pontes. Neste software, os tipos de pontes já estão parametrizados. O modelo para pontes de seção em vigas múltiplas do tipo calha é feito, integralmente, por elementos de área e a carga móvel é representada por meio de trem-tipo longitudinal, que é aplicada sobre uma superfície de influência.

Modelos *CSi Bridge*

Os dados dos modelos são apresentados na Tabela 3.

Tabela 3 – Dados dos modelos – *CSi Bridge*

Modelos	N_v	L (m)	λ (m)	d/L
Ponte 1	5	33,00	3,35	0,41
Ponte 2	4	23,50	4,00	0,51
Ponte 3	3	18,00	3,00	0,33
Ponte 4	2	37,00	4,50	0,12

A carga móvel aplicada nos modelos é o TB-450, conforme NBR 7188:2023. Para que a comparação possa ocorrer, as propriedades dos elementos, como vigas e transversinas, são mantidas. As Figura 11 e Figura 12 apresentam, respectivamente, a seção transversal e a vista tridimensional da Ponte 01.

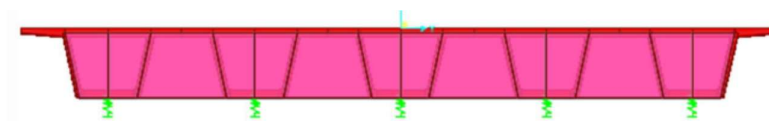


Figura 11 – Seção transversal – Ponte 1

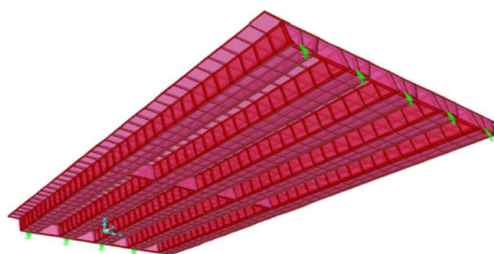


Figura 12 – Vista tridimensional – Ponte 1

Resultados

Para as pontes dos modelos complexos do *CSi Bridge*, foram realizados os cálculos de distribuição transversal de carregamento pelo Método de Courbon e pelas curvas da Figura 10. Os diferentes métodos são comparados graficamente na Figura 13, apresentada a seguir. Além disso, por meio do conjunto de resultados dos 72 modelos realizados no *SAP2000*, é possível traçar os CRTs reais para os novos modelos do *CSi Bridge*.

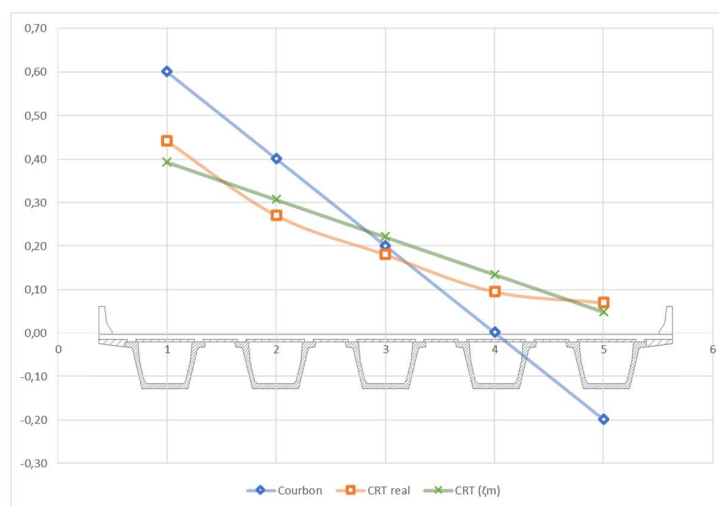


Figura 13 – Comparativo das linhas de influência transversais – Ponte 1

As equações obtidas para a Ponte 1, segundo os dois métodos, são resumidas na Tabela 4.

Tabela 4 – Equações dos CRTs definidas para a Ponte 1 ($d/L = 0,41$)

Ponte 1 (5 vigas)	Courbon ($\zeta = 1$) (Tabela 1)	Modif. Proposta ($\zeta_m = 0,43$) (Figura 10)
$CRT_{1,1}$	$0,20 + 0,4\zeta$	$0,22 + 0,4\zeta_m$
$CRT_{1,2}$	$0,20 + 0,2\zeta$	$0,22 + 0,2\zeta_m$
$CRT_{1,3}$	$0,20$	$0,22$
$CRT_{1,4}$	$0,20 - 0,2\zeta$	$0,22 - 0,2\zeta_m$
$CRT_{1,5}$	$0,20 - 0,4\zeta$	$0,22 - 0,4\zeta_m$

Após a definição da distribuição transversal de carregamento, obtém-se o trem-tipo de flexão para a viga de bordo, a mais carregada, e determina-se, por fim, a solicitação máxima de flexão. Na Tabela 5, são mostrados os valores de momentos fletores, para todos os modelos complexos, na seção de meio de vão, a partir da aplicação da carga móvel TB-450 sobre a linha de distribuição de momentos previamente descritas.

Tabela 5 – Momentos fletores de meio de vão				
Pontes	Momentos Fletores (kNm)			
	Courbon	CRT (<i>SAP2000</i>)	Modif. Proposta ($V_m; \zeta_m$)	<i>CSi Bridge</i>
Ponte 1	4474	3697	3581	3361
Ponte 2	2916	2518	2306	2288
Ponte 3	1955	1500	1509	1363
Ponte 4	6757	5129	5129	5063

Conclusões

Os resultados da Figura 10 são calibrados para uma razão GJ/EI com ordem de grandeza entre 0,1 e 1,0 ($\approx 0,6$). A modificação proposta, que foi baseada em modelos de elementos finitos, se mostrou coerente, com redução dos momentos fletores de meio de vão, para a viga de bordo, de 15% a 25%, quando comparados ao método de Courbon. O *CSi Bridge* apresenta, ainda, uma redução maior, de 20% a 30%, também comparado a Courbon. É importante destacar a proximidade dos resultados entre os modelos de ambos *softwares*, visto que se diferem tanto na natureza dos elementos que o compõe, quanto na aplicação da carga móvel e obtenção dos momentos fletores.

Os resultados obtidos por meio dos CRT dos modelos no *SAP2000*, para pontes de duas vigas, se apresentam exatos e representam uma grande parcela das pontes construídas nacionalmente, enquanto, para as demais pontes, com maior número de vigas, os resultados são muito próximos.

As quatro pontes evidenciam que as vigas calhas possuem grande importância na criação de fluxo fechado de tensões cisalhantes, superando ou igualando, desta forma, a absorção de carga por torção não uniforme. Quanto ao aspecto econômico, com a redução dos momentos fletores, espera-se diminuir as áreas de armaduras ativas e passivas. Porém, a análise se pautou unicamente no estudo da flexão, o que não é suficiente para comprovar a economicidade desta metodologia, uma vez que a torção exercida nas vigas pode demandar armadura de cisalhamento considerável.

A aplicação do método de Courbon para pontes de vigas múltiplas do tipo calhas se mostra muito conservador, quando na obtenção dos momentos fletores.

Referências

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS ABNT, 2023, NBR6118: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento, Rio de Janeiro
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS ABNT, 2023, NBR7188: Carga móvel rodoviária e de pedestres em pontes, viadutos, passarelas e outras estruturas, Rio de Janeiro
- EL DEBS, M. K. Pontes de Concreto: com ênfase na aplicação de elementos pré-moldados, São Paulo: Liv. Oficina de Textos, 2021
- J. COURBON, Calcul des Ponts à Poutres Multiples Solidarisées par des Entretoises, Annales de l'ENPC, 1940
- LOPES, M. S. Repartição Transversal de Cargas em Pontes com Vigas Múltiplas do Tipo Calha. Projeto de Graduação. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2024.
- M. RALLS, P. E. et al, The New Texas U-beam Bridges: An Aesthetic and Economical Design Solution, Precast Concrete Institute, Journal, Texas, 1993
- VALERIANO, R. Pontes, Rio de Janeiro: Liv. Oficina de Textos, 2021