



# Análise Comparativa entre Métodos Empíricos e Método das Bielas e Tirantes quanto ao Dimensionamento das Armaduras de Reforço de uma Viga em Concreto Armado com Abertura na Alma

Nathália Flores Cogo<sup>1</sup>, Bruna Manica Lazzari<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul/ nathalia.flores.cogo@gmail.com

<sup>2</sup> Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul / bruna.lazzari@pucrs.br

## Resumo

A busca por um melhor uso do espaço em uma edificação é cada vez mais frequente nas construções residenciais e nas comerciais. Para tanto, os projetistas acabam optando por tamanhos menores de pé-direito. Tal fato compromete muitas vezes o espaço útil sob as vigas para a passagem das tubulações de projetos complementares, sendo necessário que essas tubulações atravessem a alma das vigas. Em razão disso e da importância que o elemento viga tem em uma estrutura, este trabalho teve como objetivo avaliar o comportamento das armaduras de uma viga real de concreto armado com abertura na alma no Estado Limite Último (ELU). Para tanto, fez-se uma análise comparativa das tensões no aço ao final do carregamento entre os métodos empíricos de Leonhardt e Mönnig (1978) e Süssekind (1985) e o método das bielas e tirantes com o Método dos Elementos Finitos (MEF) através do *software* ANSYS versão 22.1 e 23.2. Assim, foi possível concluir que os métodos funcionam bem no ELU e que apresentam diferenças de tensões nas armaduras, sendo o método das bielas e tirantes o mais conservador entre os 3 e o de Süssekind (1985) o mais conservador entre os métodos empíricos.

## Palavras-chave

Viga com abertura; métodos empíricos; método das bielas e tirantes; método dos elementos finitos.

## Introdução

As construtoras e as incorporadoras buscam cada vez mais aproveitar ao máximo o potencial construtivo dos seus terrenos, de modo a disponibilizar a maior quantidade possível de apartamentos para a venda. Para isso, os projetistas frequentemente optam por utilizar o tamanho de pé-direito mínimo exigido por norma. Tal fato, faz com que não haja espaço útil sob as vigas para a passagem de tubulações de projetos complementares, sendo necessário realizar aberturas na alma das vigas (KUNZLER, 2013). É visto, portanto, que o uso de aberturas em estruturas de concreto armado é uma solução comumente aplicada em projetos de construções convencionais e de grande porte.

A execução de aberturas em vigas de concreto está condicionada ao atendimento da NBR 6118/2023, cabendo ao engenheiro verificar se essas atendem os requisitos da norma e realizar o dimensionamento de armaduras de reforço próximas à descontinuidade. Alguns dos métodos de dimensionamento mais conhecidos são os dos autores Leonhardt e Mönnig e Süssekind, bem como o método de bielas e tirantes. A norma NBR 6118 (ABNT, 2023) recomenda o método de bielas e tirantes para esse tipo de solução. Trata-se de um modelo que representa o fluxo de tensões no elemento através de uma analogia de treliça com barras comprimidas e tracionadas, possibilitando que o dimensionamento seja feito a partir dos esforços obtidos no modelo. Já o dimensionamento proposto pelos autores consiste em um modelo de obtenção de esforços aliado ao cálculo de flexão-composta na região da abertura. Ademais, uma forma de análise muito difundida no meio acadêmico é a análise numérica pelo MEF.

Diante da importância das vigas em uma edificação e da frequência com que se realiza abertura em vigas, o presente trabalho visa compreender o comportamento de uma viga com abertura no ELU, com ênfase nas armaduras. Para isso, fez-se uma análise comparativa de uma viga real com abertura dimensionada pelos métodos empíricos de Leonhardt e Mönnig e Süssekind e pelo método de bielas e tirantes, com o MEF por meio do *software* ANSYS.



## 2 Parâmetros de Dimensionamento de vigas com abertura segundo Leonhardt e Mönnig

De acordo com Leonhardt e Mönnig (1978) o dimensionamento de uma viga com abertura inicia desconsiderando a presença da abertura, sendo dimensionadas as armaduras longitudinais e transversais necessárias para absorver as solicitações da seção cheia. Em seguida, encontram-se os valores de esforço cortante e do momento fletor no eixo da abertura. Com base nestes valores, e conhecida a distância entre os eixos dos banzos comprimido e tracionado, calcula-se os esforços de cada banzo. A força normal é igual em ambos os banzos e é calculada a partir da decomposição do momento fletor do eixo da abertura, utilizando a distância entre os eixos dos banzos (equação 1).

$$(-D) = Z = \frac{M_m}{z}; z = \text{distância entre os eixos dos banzos} \quad (\text{equação 1})$$

O banzo superior comprimido absorve 80% a 90% da força cortante (equação 2), enquanto o banzo inferior tracionado absorve 20% a 10% da força cortante (equação 3). O momento fletor é calculado multiplicando-se a força cortante, superior para o banzo superior e inferior para o banzo inferior, pela metade do comprimento da abertura (equação 4 e 5) (LEONHARDT; MÖNNIG, 1978).

$$Q_{sup} = (0,8 \text{ a } 0,9) Q_m; \quad Q_{inf} = (0,2 \text{ a } 0,1) Q_m; \quad (\text{equação 2 e 3})$$

$$M_{sup} = \pm Q_{sup} * \frac{l'}{2}; \quad M_{inf} = \pm Q_{inf} * \frac{l'}{2}; \quad (\text{equação 4 e 5})$$

Os banzos, portanto, devem ser dimensionados à flexão composta separadamente, utilizando os valores de momento fletor e esforço normal respectivos para cada banzo (figura 1). Além disso, deve-se calcular a armadura de suspensão junto à abertura. Para tanto, dimensiona-se estribos para o lado mais afastado do apoio para resistir cerca de 80% do esforço cortante no eixo da abertura e para o lado mais próximo são utilizados de um a três estribos. Vale lembrar que em regiões da viga onde há força cortante, a execução da abertura está condicionada à permanência das bielas de compressão ou pórticos rígidos (LEONHARDT; MÖNNIG, 1978).

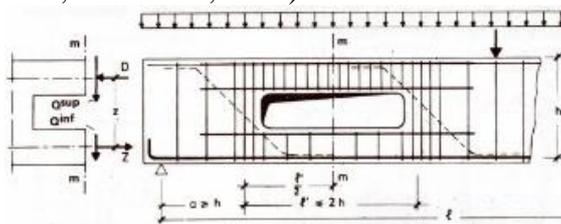


Figura 1 – Modelo de esforços em uma viga com abertura na alma (LEONHARDT; MÖNNIG, 1978)

## 3 Parâmetros de Dimensionamento de vigas com abertura segundo Süssekind

Para Süssekind (1985), analogamente aos autores Leonhardt e Mönnig (1978), o dimensionamento de uma viga com abertura inicia-se pelo cálculo de flexão simples, tal como uma viga maciça. Após, intercepta-se a viga por um plano que passa no eixo da abertura, sendo essa seção equilibrada pela aplicação dos esforços atuantes (figura 2).

A viga com abertura possui uma seção comprimida, na qual a rigidez à flexão se dá pelo concreto, e uma seção tracionada, na qual a rigidez à flexão se dá pelo aço. Sendo assim, o esforço cortante ( $Q_{tot}$ ) é dividido proporcionalmente à rigidez à flexão nas seções comprimida ( $Q_{1d}$ ) e tracionada ( $Q_{2d}$ ) à abertura. Uma vez que a força cortante é significativamente maior na região comprimida, aconselha-se assumir o valor total do esforço cortante ( $Q_{tot}$ ) na seção superior (equação 6). Ainda, por cautela e para colaborar na limitação da fissuração do tirante inferior, admite-se que o valor do cortante na seção inferior seja igual a 10% do valor total do cortante ( $Q_{tot}$ ) (equação 7) (SÜSSEKIND, 1985).

$$Q_{1d} = Q_{tot}; \quad Q_{2d} = 0,1 \times Q_{tot} \quad (\text{equação 6 e 7})$$

O momento fletor do eixo da abertura ( $M_d$ ) é transmitido na seção superior e na inferior pelas forças normais  $D_d$  e  $Z_d$ , respectivamente. A força  $D_d$  é aplicada a  $0,4x$  do bordo mais comprimido, sendo  $x$  o valor da linha neutra da seção, e  $Z_d$ , aplicada ao nível da armadura de flexão tracionada. Assim, a seção superior e a inferior à abertura estão submetidas à flexão composta e devem ser dimensionadas para resistir ao esforço normal e ao momento fletor atuantes em cada seção (figura 2) (SÜSSEKIND, 1985). O dimensionamento proposto por Leonhardt e Mönnig (1978) e por Süssekind (1985)



apresentam diferenças, são elas: local de aplicação da força normal, distribuição do esforço cortante na seção superior e inferior à abertura e cálculo do momento fletor.

De acordo com Sússekind (1985) é desejável que a abertura esteja localizada na região tracionada da viga, de modo que o cortante seja transmitido em sua totalidade pelo banzo comprimido. Para isso, é conveniente buscar valores baixos para a dimensão do banzo tracionado, desde que seja garantido uma distância mínima de 10 cm para conter a armadura de flexão.

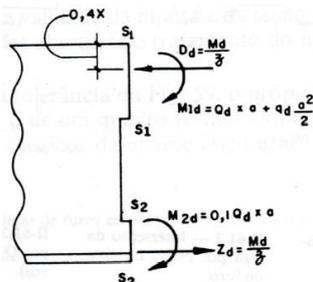


Figura 2 – Esforços atuantes na região da abertura (SÜSSEKIND, 1985)

#### 4 Método dos Elementos Finitos (MEF) e Software ANSYS

A análise de um elemento estrutural pelo MEF pode ser feita através da modelagem numérica em um *software*. Para esse estudo foi escolhido o *software* ANSYS, bem como o sistema *APDL*. Inicialmente, foi utilizado como base o *script* elaborado por Ceron (2021).

Para representar o comportamento do concreto foi escolhido o modelo constitutivo DP-CONCRETE (DP – *Drucker-Prager*). Alguns parâmetros devem ser estabelecidos para a utilização desse modelo, como os parâmetros do modelo linear isotrópico, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson. Posteriormente, são estabelecidos os valores de resistência à compressão uniaxial, compressão biaxial e tração uniaxial ( $f_{cm}$ ,  $f_{c2cm}$  e  $f_{ctm}$ ), bem como os parâmetros de dilatância. Por fim, para descrever o comportamento do material após o início da plastificação, define-se o modelo HSD (*Hardening, Softening and Dilatation*), seguindo a lei de endurecimento e amolecimento (CERON, 2021).

O elemento finito escolhido para a simulação do concreto foi o SOLID186, o qual pode ser definido como um sólido 3-D que possui 20 nós de ordem superior. Cada nó apresenta três graus de liberdade, isto é, podem transladar nas direções x, y e z (ANSYS, 2022).

O modelo constitutivo escolhido para a representação do aço foi o BISO (*Bilinear Isotropic Hardening*). Para o uso desse modelo deve-se estabelecer os parâmetros do modelo linear isotrópico, módulo de elasticidade tangente e tensão de escoamento (CERON, 2021).

O elemento finito selecionado para representar o aço no *script* foi o REINF264, o qual necessita de um elemento base para ser lançado. Quanto às coordenadas nodais, graus de liberdade e às conectividades do elemento, esses dados são iguais aos do elemento base. O elemento REINF264 foi escolhido por se tratar de um elemento incorporado, permitindo que as barras de aço ocupem posições arbitrárias dentro do elemento que representa o concreto (RACHINHAS, 2020). O lançamento deste elemento através do *script* foi realizado a partir da aplicação do *Mesh-independent Model*.

#### 5 Parâmetros de Dimensionamento Segundo o Método de Bielas e Tirantes

O modelo de bielas e tirantes consiste em barras comprimidas denominadas bielas e barras tracionadas denominadas tirantes ligados entre si por nós. As solicitações nas barras são calculadas através das equações de equilíbrio entre as forças internas e externas. A disposição das bielas e tirantes é feita com base no tipo de ações atuantes na estrutura e a área de aplicação dessas, ângulo entre bielas e tirantes, detalhamento da armadura e cobrimento da armadura (SILVA; GIONGO, 2000).

Uma estrutura pode ser dividida em regiões contínuas e descontínuas, denominadas B e D respectivamente. Uma região é dita contínua quando a hipótese de Bernoulli de distribuição linear de deformações ao longo da seção transversal é válida. Em seções não fissuradas as tensões são calculadas com o auxílio das propriedades da seção. Enquanto em seções fissuradas as tensões podem ser obtidas por modelos de treliças usuais. Uma região é dita descontínua quando a distribuição de



tensões é não-linear, não sendo válida a hipótese de Bernoulli. As regiões não fissuradas podem ser analisadas por modelos elásticos lineares. Nas regiões fissuradas deve-se aplicar o método de bielas e tirantes (CAMPOS FILHO, 1996). A NBR 6118 (ABNT, 2023) define uma distância  $h$  igual a altura da seção transversal do elemento como a distância limite entre as regiões B e D.

O modelo de bielas e tirantes inicia com a determinação das forças e das reações que atuam no contorno da região D. As regiões submetidas a um carregamento distribuído, devem ter a carga distribuída decomposta em cargas nodais equivalentes. Em seguida é possível traçar o caminho que as forças percorrem por dentro da região D, sendo os caminhos curtos os que apresentam as melhores soluções. As forças aplicadas no contorno da região D devem ser divididas de forma a obter resultantes individuais de tensões de mesma intensidade do lado oposto da região e que possam ser ligadas por linhas de fluxo que não se cruzam. As linhas de fluxo são substituídas por poligonais que representam as bielas e tirantes. O modelo deve atender às condições de equilíbrio, ser orientado pela teoria da elasticidade e resultar em um detalhamento de armadura prático (CAMPOS FILHO, 1996). A NBR 6118 (ABNT, 2023) estabelece que o eixo das bielas devem ser definidos de modo a obter valores de tensões o mais próximo possível das tensões principais de compressão e dos tirantes, dos eixos das armaduras efetivamente detalhadas. Além disso, as bielas inclinadas devem apresentar ângulo de inclinação cuja tangente esteja entre 0,57 e 2 em relação ao eixo da armadura longitudinal do elemento estrutural. O item 22.3.2 da NBR 6118 (ABNT 2023) apresenta os parâmetros para a verificação das tensões de compressão máximas nas bielas e regiões nodais, são eles:

Tensão resistente máxima no concreto em regiões com tensão de compressão transversal ou sem tensão de tração transversal e em nó totalmente comprimidos (nós CCC):

$$f_{cd1} = 0,85 \alpha_{v2} f_{cd} \quad (\text{equação 8})$$

Tensão resistente máxima no concreto em regiões com tensões de tração e em nós em que concorram ao menos dois tirantes tracionados (nós CTT ou TTT):

$$f_{cd2} = 0,60 \alpha_{v2} f_{cd} \quad (\text{equação 9})$$

Tensão resistente máxima no concreto em nós em que concorre um tirante tracionado (nós CCT):

$$f_{cd3} = 0,72 \alpha_{v2} f_{cd} \quad (\text{equação 10})$$

O fator de efetividade do concreto ( $\alpha_{v2}$ ) é dado pela equação 11.

$$\alpha_{v2} = 1 - \frac{f_{ck}}{250} \quad (\text{equação 11})$$

A NBR 6118 (ABNT 2023) define que a área de aço em cada tirante é obtida por meio da força no tirante e da resistência de escoamento do aço, considerando o ELU (equação 12).

$$A_s = \frac{F_{Sd}}{f_{yd}} \quad (\text{equação 12})$$

## 6 Caracterização da viga

A viga com abertura na alma foi escolhida de um projeto estrutural real estudada por Cardoso (2010), sendo feitas algumas adaptações no elemento para a presente pesquisa, conforme mostra a figura 3. A resistência característica do concreto ( $f_{ck}$ ) empregada foi de 25 MPa e o cobrimento adotado foi de 2,5 cm. O carregamento da viga é uniformemente distribuído com um valor total ( $q_{tot}$ ) de 18,6 kN/m. A fim de avaliar o elemento no seu Estado Limite Último (ELU), o carregamento foi majorado por 1,4, resultando em um valor de 26,04 kN/m.



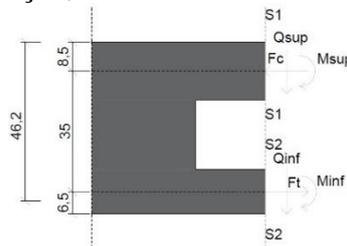
Figura 3 – Geometria da viga (COGO, 2022)

## 6 Métodos Empíricos

Inicialmente, a viga foi calculada como se não possuísse abertura na seção. Dispondo dos esforços de cálculo,  $M_{max} = 81,34$  kN.m e  $Q_{max} = 65,10$  kN, realizou-se o dimensionamento da viga submetida à flexão simples e ao cisalhamento. Quanto à flexão, trata-se de um caso de armadura simples, na

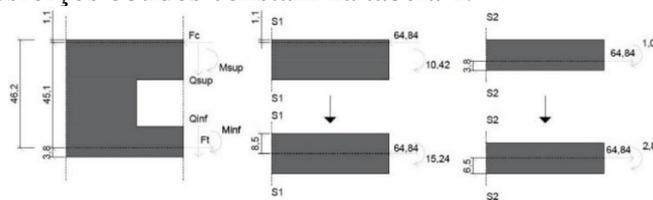


qual a área de armadura necessária é de 4,34 cm<sup>2</sup>, detalhadas por 4 barras de 12,5 mm de diâmetro. Quanto ao cisalhamento, adotou-se armadura mínima, detalhada por barras de 6,3 mm de diâmetro a cada 25 cm. A partir do cálculo e do detalhamento da seção cheia da viga pode-se realizar o dimensionamento considerando a descontinuidade da seção. Para tanto, deve-se conhecer o valor do momento fletor e do cortante no eixo da abertura, 52,08 kN e 29,30 kN.m, respectivamente. Para dar sequência ao dimensionamento, deve-se interceptar a viga por um plano vertical no eixo da abertura, obtendo assim duas seções submetidas a esforços diferentes. A seção superior S1-S1 está submetida à flexo-compressão. Já a seção inferior S2-S2 está submetida à flexo-tração. O primeiro método utilizado para dimensionar a viga foi o de Leonhardt e Mönnig (1978). Para isso, foram encontrados o esforço normal, cortante e momento fletor, nos banzos superior e inferior (tabela 1). Para o cálculo do cortante, considerou-se que o banzo superior e inferior absorve 85% e 15% do esforço cortante no eixo da abertura, respectivamente. O esforço normal de compressão e de tração estão posicionados no eixo de cada seção, distanciados 35 cm um do outro (figura 4).



**Figura 4 – Esforços obtidos pelo método de Leonhardt e Mönnig (1978) (COGO, 2022)**

Em seguida, fez-se o dimensionamento da viga pelo método de Süsssekind (1985), para isso foram encontrados o esforço normal, cortante e momento fletor, nos banzos superior e inferior. O valor da linha neutra da seção é de 2,67 cm e a face superior da abertura está localizada a 17 cm da face superior da viga. Portanto a abertura intercepta a região tracionada da viga e o cálculo pode prosseguir. Para o cálculo do esforço cortante considerou-se que o banzo superior absorve todo o esforço cortante do eixo da abertura e o banzo inferior absorve 10% por resguardo. Ressalta-se que o posicionamento da força normal pelo método de Süsssekind (1985) e de Leonhardt e Mönnig (1978) é diferente, resultando em uma diferença no momento fletor de cada seção. A força normal na seção superior é aplicada a 0,4x do bordo mais comprimido, sendo x o valor da linha neutra da seção. Já a força normal na seção inferior é aplicada ao nível da armadura de flexão tracionada. Assim, o momento fletor é resultante da parcela do cortante que gera o momento, análogo ao Leonhardt e Mönnig (1978), somado a parcela de momento gerada pelo deslocamento da força normal até o centro da seção (figura 5). Os esforços obtidos constam na tabela 1.



**Figura 5 – Esforços obtidos pelo método de Süsssekind (1985) (COGO, 2022)**

**Tabela 1 - Comparativo de esforços obtidos pelos métodos analíticos**

Esforço	Leonhardt e Mönnig	Süsssekind
Normal superior ( $N_{sup}$ )	83,70 kN	64,84 kN
Cortante superior ( $Q_{sup}$ )	44,27 kN	52,08 kN
Momento fletor superior ( $M_{sup}$ )	8,85 kN.m	15,24 kN.m
Normal inferior ( $N_{inf}$ )	83,70 kN	64,84 kN
Cortante inferior ( $Q_{inf}$ )	7,81 kN	5,21 kN
Momento fletor inferior ( $M_{inf}$ )	1,56 kN.m	2,82 kN.m

Com base nos esforços obtidos, a seção superior foi dimensionada por flexo-compressão assimétrica e para cisalhamento e a seção inferior por flexo-tração assimétrica e para cisalhamento. A diferença



dos esforços entre os métodos resultou em uma diferença de área de aço calculada e detalhada. A seção superior, em ambos os métodos, encontra-se no caso de flexo-compressão de grande excentricidade. A seção inferior encontra-se no caso de flexo-tração com pequena excentricidade pelo método de Leonhardt e Mönnig (1978) e de flexo-tração com grande excentricidade pelo método de Sússekind (1985). A figura 6 e a tabela 2 apresentam um esquema de detalhamento das armaduras e as áreas de aço obtidas nos dimensionamentos.

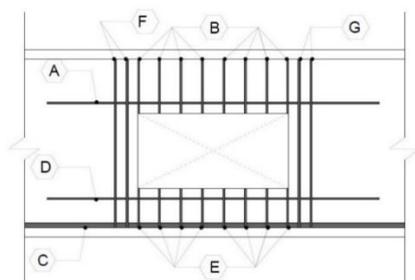


Figura 6 – Detalhamento esquemático das armaduras (COGO, 2022)

Tabela 2 - Comparativo das áreas de aço da viga obtida pelos métodos analíticos

Armadura (Posição)	Leonhardt e Mönnig			Sússekind		
	Área calc.	Área adot.	Detalhamento	Área calc.	Área adot.	Detalhamento
$A_{s1,tração}$ (A)	0,63 cm <sup>2</sup>	0,63 cm <sup>2</sup>	2Ø6,3mm	2,47 cm <sup>2</sup>	2,50 cm <sup>2</sup>	5Ø8,0mm
$A_{sw,sup}$ (B)	4,33 cm <sup>2</sup> /m	4,44 cm <sup>2</sup> /m	Ø5,0mm c/8 cm	5,85 cm <sup>2</sup> /m	6,67 cm <sup>2</sup> /m	Ø5,0mm c/6 cm
$A_{s1,tração}$ (C)	1,59 cm <sup>2</sup>	4,92 cm <sup>2</sup>	4Ø12,5 mm	1,73 cm <sup>2</sup>	4,92 cm <sup>2</sup>	4Ø12,5 mm
$A_{s2,comp.}$ (D)	0,34 cm <sup>2</sup>	0,40 cm <sup>2</sup>	2Ø5,0mm	-	0,40 cm <sup>2</sup>	2Ø5,0mm
$A_{sw,inf}$ (E)	2,05 cm <sup>2</sup> /m	6,67 cm <sup>2</sup> /m	Ø5,0mm c/6cm	2,05 cm <sup>2</sup> /m	6,67 cm <sup>2</sup> /m	Ø5,0mm c/6cm
$A_{sw,s esq}$ (F)	0,96 cm <sup>2</sup>	1,25 cm <sup>2</sup>	2 est. Ø6,3mm	0,96 cm <sup>2</sup>	1,25 cm <sup>2</sup>	2 est. Ø6,3mm
$A_{sw,s dir}$ (G)	0,96 cm <sup>2</sup>	1,25 cm <sup>2</sup>	2 est. Ø6,3mm	0,96 cm <sup>2</sup>	1,25 cm <sup>2</sup>	2 est. Ø6,3mm

Na seção inferior, adotou-se a área de aço da armadura longitudinal inferior da seção cheia como a área de aço da armadura de reforço longitudinal (posição C), pois a área calculada para essa armadura foi menor que a da seção cheia e encontram-se na mesma posição. No dimensionamento pelo método de Sússekind (1985), não seria necessário a armadura de reforço longitudinal na seção inferior (posição D), então adotou-se a armadura mínima. A área de aço calculada para a armadura transversal de reforço foi a mínima na seção inferior para os dois métodos. Porém, adotou-se uma área de aço maior pois o espaçamento máximo calculado é de 6 cm. A armadura de suspensão é igual em ambos os métodos e foi calculada para absorver 80% do esforço cortante.

### 7 Método de Bielas e Tirantes

Foi utilizado como base o modelo proposto por Simões (1997) apud Silva e Giongo (2000), que leva em consideração aberturas próximas à extremidade inferior da viga. A obtenção dos esforços foi realizada com o auxílio do *software* FTOOL.

Inicialmente foi determinada a região de descontinuidade no entorno da abertura, sendo considerada à esquerda da abertura uma distância de 30 cm, correspondente à distância do apoio A até o início da abertura. A distância à direita da abertura foi tomada igual a altura acima da abertura do modelo.

O modelo foi criado de modo que os tirantes mantivessem a disposição das barras de armadura propostas por Sússekind e as bielas de compressão apresentassem ângulo de inclinação dentro do limite estabelecido pela norma (figura 7a). O esforço cortante e o momento fletor na borda da região D são iguais a 30,52 kN e 33,08 kNm, respectivamente. Assim, para obter a força de tração e de compressão divide-se o momento fletor pelo braço de alavanca entre as forças, resultando em um valor igual a 73,28 kN para ambas. A resultante de compressão é aplicada no nó a 1,1 cm do bordo superior e a de tração a 46,245 cm do bordo superior. No nó a 46,245 cm da viga é aplicado o esforço cortante. A parcela de carga referente ao carregamento distribuído é obtida pela multiplicação da carga pela sua área de influência, resultando em 1,05 kN para os nós de extremidade e 2,09 kN para os nós centrais. A partir dos esforços nas barras obtidos pelo *software* (figura 7b), foi possível calcular



as áreas de aço necessárias para absorver os esforços (equação 12), sendo os resultados apresentados na tabela 3. Vale lembrar que os esforços obtidos pelo *software* foram majorados por 1,4..

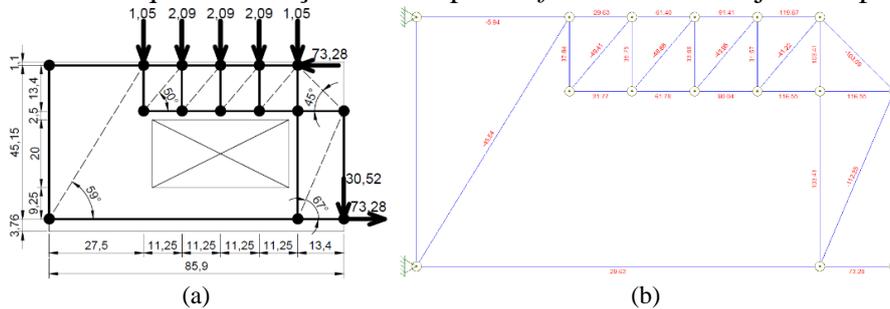


Figura 7 – Modelo de Bielas e Tirantes: a) Desenho esquemático; b) Esforços (AUTORA, 2023)

Tabela 3 - Comparativo das áreas de aço da viga obtida pelos métodos analíticos

Armadura (Posição)	Bielas e Tirantes		
	Área calc.	Área adot.	Detalhamento
$A_{s1,tração}$ (A)	3,75 cm <sup>2</sup>	3,75 cm <sup>2</sup>	3Ø12,5mm
$A_{sw,sup}$ (B)	10,83 cm <sup>2</sup> /m	11,11 cm <sup>2</sup> /m	Ø8,0mm c/9 cm
$A_{s1,tração}$ (C)	-	-	4Ø12,5mm
$A_{s2,comp.}$ (D)	-	-	2Ø5mm
$A_{sw,inf}$ (E)	2,05 cm <sup>2</sup> /m	6,67 cm <sup>2</sup> /m	Ø5,0mm c/6cm
$A_{sw,sesq}$ (F)	-	-	2 est. Ø5mm
$A_{sw,sdir}$ (G)	3,33 cm <sup>2</sup>	4 cm <sup>2</sup>	3 est. Ø12,5mm

Em virtude de a seção inferior não apresentar bielas e tirantes, foi adotado armadura mínima para as armaduras de reforço inferior (posição D e E). A armadura da posição C foi mantida a mesma da seção inteira, uma vez que o dimensionamento não foi feito para toda a extensão da viga. A armadura de suspensão à esquerda e à direita da abertura apresentam área de aço diferentes. Adotou-se armadura mínima para a armadura de suspensão à esquerda da abertura, pois não há tirantes nessa posição.

### 8 Método numérico

Após o dimensionamento da viga pelos métodos propostos, realizou-se a modelagem numérica das vigas através do *software* ANSYS. Ainda, foi modelada a viga com abertura e sem reforço e a viga com seção cheia, para análise e comparativos.

A viga não apresenta simetria longitudinal, apenas transversal, por isso foi lançada com os 5 m de vão e com metade da seção transversal. A viga está apoiada em duas placas cujo material adotado se assemelha às propriedades do aço. O tamanho máximo da malha de elementos finitos utilizada foi de 10 cm. O carregamento foi aplicado em uma etapa, subdividida em 100 incrementos de carga.

A utilização do modelo DP-CONCRETE depende da definição do módulo de elasticidade, sendo que esse é calculado pela equação 13, retirada do Código Modelo fib (2010). O valor de  $E_{c0}$  é de 21500 MPa e o valor de  $\alpha_E$  adotado foi igual a 1. O valor de  $f_{cm}$  é obtido pela soma do  $f_{ck}$  mais 8 MPa.

$$E_{ci} = E_{c0} \alpha_E f_{cm}^{1/3} \quad (\text{equação 13})$$

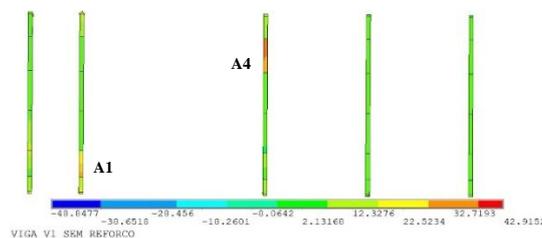
### 9 Análise e resultados

A análise numérica consistiu na verificação das máximas tensões no aço o final do carregamento compiladas na tabela 4. A armadura de montagem não foi modelada, pois não apresenta função estrutural. Em todas as vigas, a armadura longitudinal inferior encontra-se mais tracionada no centro do vão (sem atingir a tensão resistente do material) e os estribos da seção cheia praticamente não estão sendo solicitados. Tal fato se mostra coerente com o cálculo analítico, no qual foi calculado armadura mínima. Todavia, na viga sem reforço o primeiro estribo ao lado de cada face da abertura possui tensões de tração elevadas, próximas à 34,2 kN/cm<sup>2</sup>, na região das arestas A1 e A4 (figura 8). Nas vigas com reforço esses estribos apresentam tensões baixas, devido a presença das armaduras de suspensão, sendo o maior valor de encontrado nessa região na ordem de 10 kN/cm<sup>2</sup>.

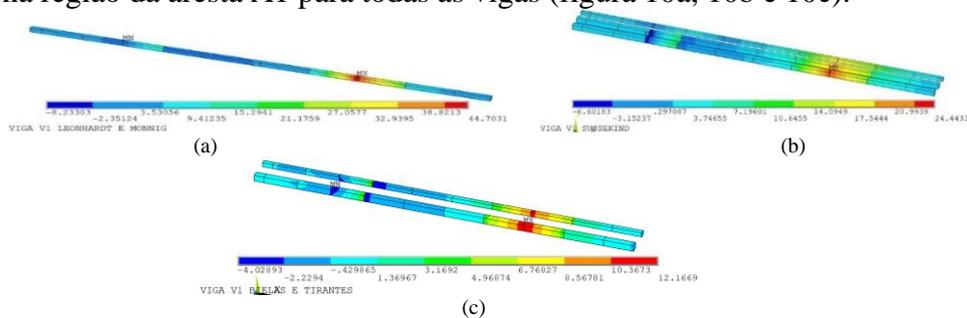


**Tabela 4 - Comparativo de tensões no aço ao final do carregamento em kN/cm<sup>2</sup>**

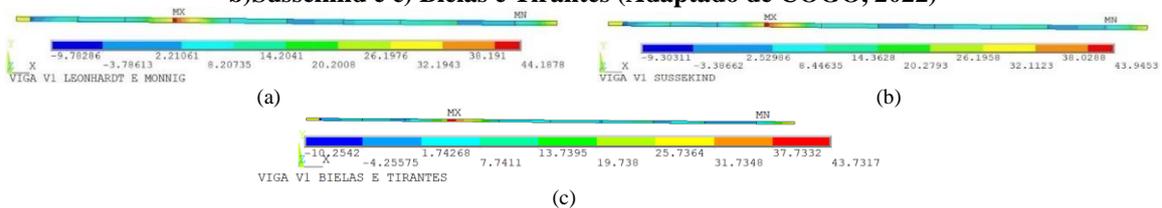
Armadura (Posição)	Leonhardt e Mönnig		Süssekind		Bielas e Tirantes	
	$\sigma_{Tração}$	$\sigma_{Comp.}$	$\sigma_{Tração}$	$\sigma_{Comp.}$	$\sigma_{Tração}$	$\sigma_{Comp.}$
$A_{s1,tração}$ (A)	44,70	-8,23	24,44	-6,60	12,17	-4,03
$A_{sw,sup.}$ (A3) (B)	-	-1,04	-	-1,28	-	-1,63
$A_{sw,sup.}$ (A4) (B)	16,78	-	15,14	-	6,78	-
$A_{s1,tração}$ (C)	35,40	-	35,30	-	35,40	-
$A_{s2,comp.}$ (D)	44,18	-9,78	43,94	-9,30	43,73	-10,25
$A_{sw,inf.}$ (A1) (E)	16,08	-	10,85	-	6,72	-
$A_{sw,inf.}$ (A2) (E)	-	-1,91	-	-1,46	-	-1,00
$A_{sw,s,esq}$ (A1) (F)	8,09	-	4,01	-	1,25	-
$A_{sw,s,dir}$ (A4) (G)	32,29	-	32,77	-	13,33	-



**Figura 8 – Tensões de tração no primeiro estribo antes e depois da abertura na viga sem reforço (COGO, 2022)**  
 Na viga de Leonhardt e Mönnig a armadura de reforço longitudinal superior entra em escoamento na região acima da aresta A4 (figura 9a). Na viga de Süssekind (figura 9b) e na viga de bielas e tirantes (figura 9c), as armaduras de reforço superiores não entram em escoamento, mas encontram-se mais tracionadas na região acima da aresta A4. Ressalta-se que há uma redução de 50,20% da tensão nessa região da viga de Süssekind para a de bielas e tirantes. O reforço longitudinal inferior entrou em escoamento na região da aresta A1 para todas as vigas (figura 10a, 10b e 10c).



**Figura 9 – Tensões na armadura de reforço longitudinal superior (kN/cm<sup>2</sup>) na viga de: a) Leonhardt e Mönnig; b) Süssekind e c) Bielas e Tirantes (Adaptado de COGO, 2022)**



**Figura 10 – Tensões nas armaduras de reforço longitudinal inferior (kN/cm<sup>2</sup>) na viga de: a) Leonhardt e Mönnig; b) Süssekind e c) Bielas e Tirantes (Adaptado de COGO, 2022)**

O estribo de reforço superior acima da aresta A4 é o mais tracionado e em cima da aresta A3 é o mais comprimido para as 3 vigas (figura 11a, 11b e 11c). Todavia, observa-se uma redução de 59,59% e 55,22% da tensão nessa região ao comparar as vigas de Leonhardt e Mönnig e Süssekind com a de bielas e tirantes, respectivamente. O estribo de reforço inferior abaixo da aresta A1 encontra-se mais tracionado, enquanto o abaixo da aresta A2 mais comprimido para as 3 vigas (figura 12a, 12b e 12c). Contudo, verifica-se uma redução da tensão nessa região de 32,52% entre os métodos empíricos. Também observa-se uma redução de tensão na mesma região de 58,21% e 38,06% ao comparar as

vigas de Leonhardt e Mönnig e Süssekind com a de bielas e tirantes, respectivamente. Ainda, observou-se ao longo do incremento de carga que os estribos superiores foram mais solicitados que os inferiores nos dois métodos, o que reforça as considerações dos autores dos métodos empíricos sobre o esforço cortante. As armaduras de suspensão apresentam regiões de tração próximas às arestas A1 e A4, sendo a região da aresta A4 a que apresenta maiores valores de tensão para as 3 vigas (figura 13a, 13b e 13c). Esses valores de tensão da região da aresta A4 foram menores na viga de bielas e tirantes, apresentando uma redução de 58,72% e 59,32% ao ser comparada com as vigas de Leonhardt e Mönnig e Süssekind, respectivamente. Isso pode estar relacionado à maior área de aço e consequentemente à melhor distribuição das tensões dessas armaduras na viga de bielas e tirantes.

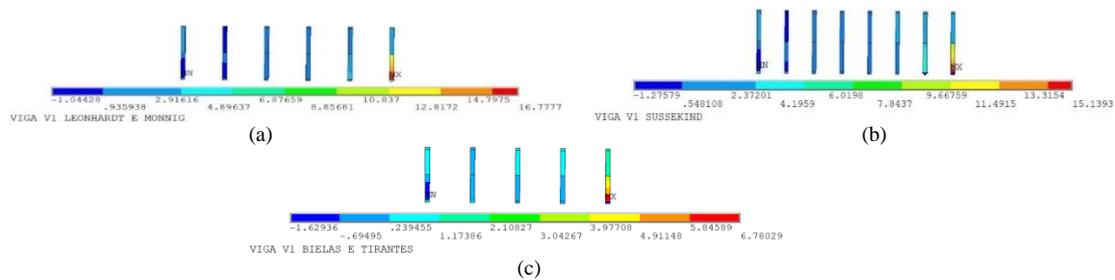


Figura 11 – Tensões nos estribos de reforço superior (kN/cm<sup>2</sup>) na viga de: a) Leonhardt e Mönnig; b) Süssekind e c) Bielas e Tirantes (Adaptado de COGO, 2022)

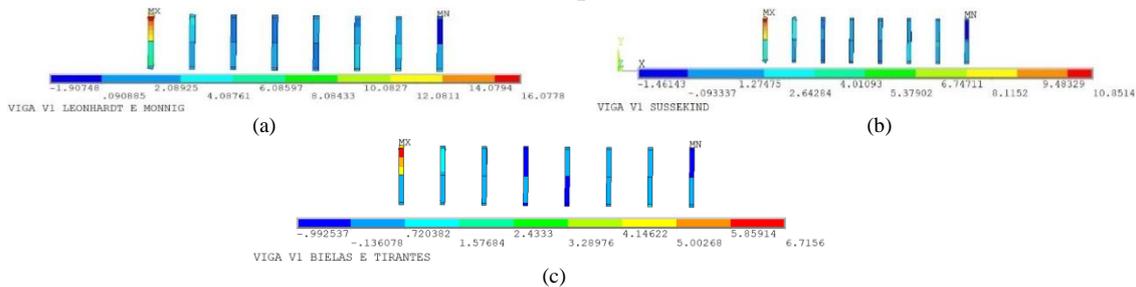


Figura 12 – Tensões nos estribos de reforço inferior (kN/cm<sup>2</sup>) na viga de: a) Leonhardt e Mönnig; b) Süssekind e c) Bielas e Tirantes (Adaptado de COGO, 2022)

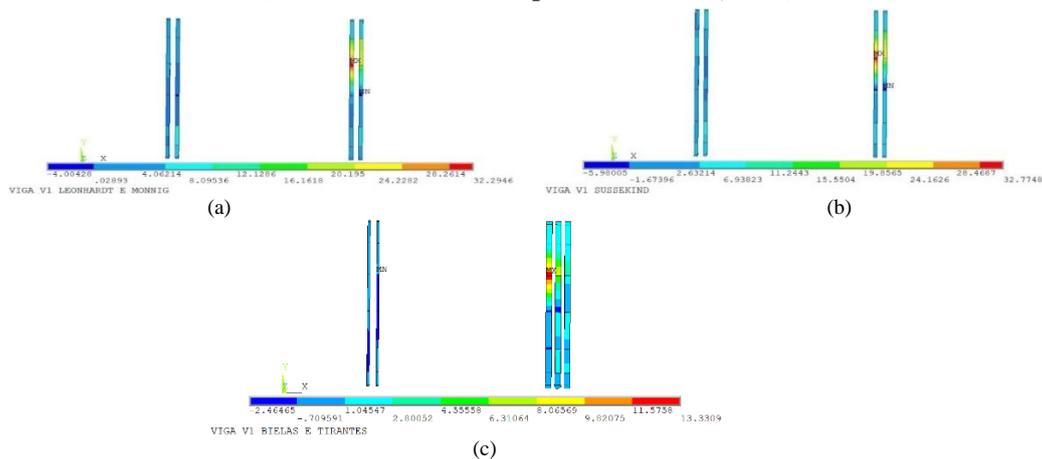


Figura 13 – Tensões nas armaduras de suspensão (kN/cm<sup>2</sup>) na viga de: a) Leonhardt e Mönnig; b) Süssekind; c) Bielas e Tirantes (Adaptado de COGO, 2022)

A armadura de reforço longitudinal inferior superou a resistência do material nas 3 vigas, já a superior escoou apenas na viga de Leonhardt e Mönnig. Tal fato ocorre devido a viga de Süssekind e a de bielas e tirantes possuírem uma maior área de aço na seção superior do que a viga de Leonhardt e Mönnig, ocorrendo uma melhor distribuição das tensões entre as armaduras de reforço de modo a não atingir a resistência do material. A armadura longitudinal inferior necessitou de uma carga 9,08% e 4,34% maior para escoar que a das vigas de Leonhardt e Mönnig e Süssekind, conforme mostra a



tabela 5. Ainda que as vigas com reforço tenham atingido a tensão resistente do aço, essas se mantiveram estáveis ao final do carregamento.

**Tabela 5 - Comparativo de carga em que as armaduras atingiram a tensão resistente do aço**

Armadura	Leonhardt e Mönning	Süssekind	Bielas e Tirantes
$A_{s1,tração}$	123,31 kN	-	-
$A_{s2,compressão}$	85,92 kN	89,82 kN	93,72 kN

Salienta-se que as análises e os resultados que constam no presente artigo são apresentados integralmente no trabalho realizado por Cogo (2022), sendo feita algumas adaptações nessa pesquisa.

### Conclusões

Este trabalho teve como objetivo avaliar as armaduras de uma viga real com abertura na alma no ELU através de uma análise comparativa entre os métodos de Leonhardt e Mönning (1978), Süssekind (1985) e o método das bielas e tirantes com o método numérico através do *software* ANSYS.

Ao comparar o método das bielas e tirantes com os métodos empíricos, é possível observar que o método das bielas e tirantes possibilita uma análise mais detalhada de cada região do elemento a ser dimensionado. Isto é, o método permite a visualização do caminho que a força percorre, bem como fornece os esforços que cada barra deve absorver. O método das bielas e tirantes apresentou uma área de aço superior à dos métodos empíricos, o que resultou em armaduras menos solicitadas.

No que tange os métodos empíricos, esses apresentam diferenças quanto ao modelo de obtenção de esforços, resultando em uma diferença no dimensionamento. Em suma, conclui-se que os métodos de cálculo apresentam bons resultados no ELU, sendo o de bielas e tirantes o mais preciso e conservador. Quanto aos métodos empíricos, o de Süssekind (1985) se mostrou o mais conservador.

### Referências

- ANSYS, inc. **Element Reference (2022 R1)**, 2022.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2023.
- CAMPOS FILHO, A. **Detalhamento das estruturas de concreto pelo Método das Bielas e Tirantes**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1996.
- CARDOSO, T. B. **Dimensionamento de elementos fletidos em concreto armado com aberturas: método empírico versus método das bielas e tirantes**. 2010. 87 f. Trabalho de diplomação (Graduação em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2021.
- CERON, M. V. **Desenvolvimento de um script para análise em elementos finitos de vigas de concreto através do software ANSYS**. 2021. 136 f. Trabalho de diplomação (Graduação em Engenharia Civil) – Escola Politécnica, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2021.
- COGO, N. F. **Análise comparativa do dimensionamento de viga em concreto armado com abertura na alma utilizando métodos analíticos e método numérico**. 2022. 71 f. Trabalho de diplomação (Graduação em Engenharia Civil) – Escola Politécnica, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2022.
- COMITÉ EURO INTERNACIONAL DU BÉTON. **CEB-FIB Código Modelo 2010**. Boletim N° 65, 2012.
- KUNZLER, P. S. **Análise paramétrica por elementos finitos de vigas de concreto armado e protendido pré-tracionadas com abertura na alma**. 2013. 112 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.
- LEONHARDT, F.;MÖNNIG, E. **Construções de concreto**: princípios básicos sobre a armação de estruturas de concreto armado. Rio de Janeiro: Interciência, 1978. v. 3.
- RACHINHAS, B. C. **Simulação computacional do processo construtivo da estrutura de edifício em concreto armado**. 2020. 242 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2020.
- SILVA, R. C.; GIONGO, J. S. **Modelos de bielas e tirantes aplicados a estruturas de concreto armado**. São Carlos: EESC-USP, 2000.
- SÜSSEKIND, J. C. **Curso de concreto**: concreto armado. 2. ed. Porto Alegre – Rio de Janeiro: Globo, 1985.