

## **METODOLOGIA DE BIELAS E TIRANTES: ESTUDO DE DESLOCAMENTOS E TENSÕES EM UMA VIGA DE CONCRETO POR ANÁLISE MATRICIAL**

**Lucas Marcon Paz<sup>1</sup>, Karoline Nonnenmacher Colferai<sup>2</sup>, Alexandre Luis Braun<sup>3</sup>**

<sup>1</sup> Universidade Federal do Rio Grande do Sul / Departamento de Estruturas / lucas.marcon@live.com

<sup>2</sup> Universidade Federal do Rio Grande do Sul / Departamento de Estruturas / karolinecolferai@gmail.com

<sup>3</sup> Universidade Federal do Rio Grande do Sul / Departamento de Estruturas / alexandre.braun@ufrgs.br

### **Resumo**

Vigas em concreto podem ser estudadas de diferentes maneiras e sob diversos aspectos. Na norma brasileira de estruturas de concreto, um passo importante a ser verificado, segundo a normativa, são as flechas instantânea e diferida no tempo. Este trabalho objetivou analisar os deslocamentos de uma viga biapoada em concreto com uma força concentrada ao centro de seu vão equivalente a 50 kN. Para isto, inicialmente discretizou-se a viga como uma treliça, seguindo os princípios da metodologia de bielas e tirantes, para então aplicar os dados da estrutura em um algoritmo elaborado na linguagem Fortran. Tal programa foi capaz de fornecer alguns dados requeridos, como as flechas em cada nó da treliça e as forças axiais vistas nas barras da estrutura. Ademais, buscou-se comparar a tensão real vista em dois pontos da seção da viga, acima da linha neutra do elemento. Para isto, fez-se uso de duas técnicas distintas: a comparação da força axial, gerando, com ela, um momento equivalente, sendo o braço de alavanca a distância do ponto à linha neutra da viga e, por outra metodologia, que se baseava em buscar a tensão através da razão entre a força axial da barra no ponto de análise e a área da seção transversal da viga de concreto. Os resultados das deflexões foram satisfatórios quando comparados às deformações da viga real, somando uma diferença de, aproximadamente, 1,10%. Enquanto isto, os resultados das tensões nos pontos de análise foram satisfatórios quando calculados através da primeira metodologia proposta; pela segunda formulação, diferenças significativas foram encontradas quando os resultados foram comparados à tensão real observada.

### **Palavras-chave**

Viga em concreto; Método de bielas e tirantes, Análise matricial; Algoritmo na linguagem Fortran.

### **Introdução**

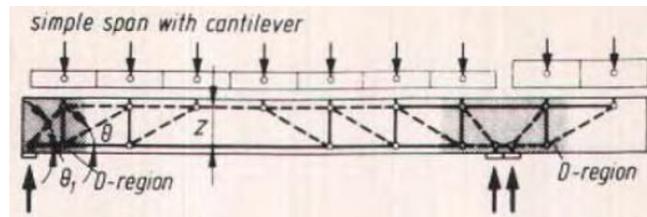
Elementos estruturais podem ser executados em diferentes materiais, como aço, concreto, madeira, entre outros. Todos estes possuem características únicas, como seu módulo de elasticidade, por exemplo, o qual interfere diretamente na mecânica do sistema ao qual será empregado. No que tange tal tema, alguns aspectos são de suma importância para o dimensionamento de estruturas, como as deflexões, sejam elas instantâneas ou diferidas no tempo, esforços aos quais o sistema estará exposto, além das solicitações, que devem ser examinadas para tornar possível o dimensionamento.

Em se tratando de vigas, todos os pontos anteriormente citados possuem relevância. Em tal elemento de concreto, a ABNT NBR 6118:2024 cita diversos procedimentos que devem ser seguidos e verificados no seu dimensionamento. A normativa aborda o tema das deflexões, que devem seguir alguns critérios estabelecidos. Ademais, o documento também traz a metodologia de bielas e tirantes, que é indicada a ser empregada em algumas situações, como quando há a presença de aberturas em elementos estruturais. Alguns autores, como Aguiar (2018), se debruçam sobre o tema e elaboram estudos de aplicação da metodologia, comprovando assim sua eficácia. Outros, como Leonhardt e Mönnig (1977), indicam sua adoção para análises de estruturas.

Tendo isto posto, o presente trabalho objetivou determinar os deslocamentos de uma viga, através de uma análise matricial, discretizando-a como uma treliça, seguindo a metodologia de bielas e tirantes. Muito além, buscou-se encontrar uma maneira alternativa de determinar tensões em pontos específicos de elemento utilizando as forças axiais das barras da treliça encontradas no passo anterior.

### Metodologia de bielas e tirantes

Em se tratando da metodologia de bielas e tirantes, a modelagem da treliça é o primeiro passo a ser discutido. Schlaich, Schäfer e Jennewein (1987) tratam em seu artigo sobre as diversas possibilidades de geometria para este elemento. Neste estudo, os autores comentam sobre o caminho das cargas no elemento que as absorve e como isto influencia na metodologia. Observa-se, na Figura 1, um sistema convencional, com cargas distribuídas sobre uma viga e a sua configuração ideal para um modelo de treliça.



**Figura 1 – Configuração de treliça para uma viga com cargas distribuídas (Schlaich, Schafer e Jennewein, 1987)**

Aguiar (2018) traz em sua dissertação de mestrado uma análise de diversos elementos estruturais modelados através da metodologia de bielas e tirantes. Dentre algumas informações, ressalta-se aqui a geometria e as dimensões da treliça para o bom atendimento ao método. O autor declara algumas dimensões, como a altura da treliça, que deve ser dada pela Equação 1 a seguir.

$$z = d - \frac{x}{2} \quad (\text{Equação 1})$$

Onde:

$z$  Altura da treliça (cm);

$d$  Altura útil da viga (cm);

$$x = d - \sqrt{d^2 - \frac{2 \times M_{sd}}{b \times f_{cd1}}}$$

$M_{sd}$  Momento de flexão de cálculo (kNcm);

$f_{cd1}$  Resistência limite de cálculo (MPa).

De uma maneira geral, de acordo com o que é visto no artigo de Schlaich, Schäfer e Jennewein (1987), a treliça para vigas deve ter barras verticais inclinadas a 45° onde há o contato da carga com o elemento, seguidas de outra barra vertical a 90°, simulando o caminho da carga, além de duas barras horizontais que fazem o fechamento superior e inferior da viga.

### Cálculo dos deslocamentos dos nós pelo script em Fortran

Segundo Soriano (2002), todo o comportamento de deslocamentos de um elemento estrutural pode ser dado pela Equação 2 a seguir.

$$[S] [u] = [f] \quad (\text{Equação 2})$$

Onde:

$[S]$  Matriz de rigidez global;

$[u]$  Vetor de deslocamentos nodais;

[*f*] Vetor de forças nodais.

Para que se possa implementar a formulação, inicialmente precisa-se obter a matriz de rigidez local de cada elemento. Oliveira *et al.* (2019) trazem a formulação para esta incógnita na Equação 3 a seguir.

$$[S] = \frac{EA}{L} \times \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \text{sen}\theta\cos\theta & -\cos^2\theta & -\text{sen}\theta\cos\theta \\ \text{sen}\theta\cos\theta & \text{sen}^2\theta & -\text{sen}\theta\cos\theta & -\text{sen}^2\theta \\ -\cos^2\theta & -\text{sen}\theta\cos\theta & \cos^2\theta & \text{sen}\theta\cos\theta \\ -\text{sen}\theta\cos\theta & -\text{sen}^2\theta & \text{sen}\theta\cos\theta & \text{sen}^2\theta \end{bmatrix} \quad (\text{Equação 3})$$

Onde:

*E* Módulo de elasticidade do material empregado (MPa);

*A* Área da barra (cm<sup>2</sup>);

*L* Comprimento da barra (cm).

Para a resolução de sistema de matrizes, pode-se elencar o método de Guass como uma possível saída, conforme afirma Cunha (2000). Segundo a autora, o método busca fazer da matriz do sistema uma diagonal inferior com valores nulos, obtendo assim o valor da última variável e encontrando os demais resultados por retro substituição. Para inicializar o processo de deixar a matriz com a diagonal inferior zerada, deve-se adotar um pivô. Este deve ser o elemento da matriz localizado na diagonal principal acima do elemento que será zerado. Tendo escolhido o pivô, faz-se a operação dada na Equação 4 a seguir.

$$m_{ij} = \frac{\text{elemento abaixo do pivô a ser zerado}}{\text{pivô}} \quad (\text{Equação 4})$$

Esta operação define o multiplicador da linha em questão. Para zerar os elementos abaixo da diagonal principal a autora define a Equação 5 a seguir.

$$A_{21}' = A_{21} - m_{21} \times A_{11} \quad (\text{Equação 5})$$

Onde:

$A_{21}'$  Novo valor do elemento da linha 2 coluna 1;

$A_{21}$  Valor inicial do elemento da linha 2 coluna 1;

$m_{21}$  Multiplicador da linha;

$A_{11}$  Elemento da linha 1 coluna 1 da matriz.

O passo a passo deve ser repetido em todas as linhas, de acordo com a autora, de forma com que se obtenha a matriz com a diagonal inferior zerada e sendo assim possível realizar a retro substituição.

### Cálculo das forças axiais pelo *script* em Fortran

Beer e Johnston Junior (1990) destacam em sua obra que treliças são compostas por barras interligadas, as quais podem somente absorver cargas axiais de mesma intensidade e sentido oposto, ou seja, estes elementos funcionam apenas sob tração ou compressão. Oliveira *et al.* (2019) explicam ainda em seu manuscrito que as forças axiais das barras podem ser calculadas através da Equação 6 a seguir.

$$[q] = [k]'[T][D] \quad (\text{Equação 6})$$

Onde:

[*q*] Vetor de cargas nodais;

[*k*]' Matriz de rigidez elementar;

[*T*] Matriz de transformação de coordenadas locais para globais;

[D] Vetor de deslocamentos nodais.

### Cálculo das tensões na viga

De acordo com Hibbeler (2010), a tensão axial em um corpo em flexão pode ser designada pela Equação 7 a seguir.

$$\sigma = \frac{My}{I} \quad (\text{Equação 7})$$

Onde:

- $\sigma$  Tensão (N/m<sup>2</sup>);
- $M$  Momento atuante na seção (Nm);
- $y$  Distância do ponto de análise em relação à linha neutra (m);
- $I$  Momento de inércia da seção do elemento (m<sup>4</sup>).

Hibbeler (2010) ainda comenta em seu livro que o momento pode ser determinado através da Equação 8, enquanto o momento binário pode ser descrito pela Equação 9.

$$M = F \times d \quad (\text{Equação 8})$$

Onde:

- $M$  Momento em determinado ponto (Nm);
- $F$  Força atuante (N);
- $d$  Distância entre a força e o ponto analisado (m).

$$M = F \times \frac{d}{2} \quad (\text{Equação 9})$$

Onde:

- $M$  Momento em determinado ponto (Nm);
- $F$  Força atuante em ambos os lados do braço de alavanca (N);
- $d$  Distância entre ambas as forças atuantes no sistema (m).

### Parâmetros adotados na análise de bielas e tirantes

A ABNT NBR 6118:2023 trata da metodologia de bielas e tirantes para diversas situações. Para calcular a tensão admissível em treliças, a norma separa a análise em regiões onde há a presença de nós onde as barras atuam somente em compressão ( $f_{cd1}$ ), para nós onde as barras encontram-se sob compressão-tração-tração ( $f_{cd2}$ ) ou ainda para nós onde as barras encontram-se em compressão-compressão-tração ( $f_{cd3}$ ). Estes parâmetros são dados pelas Equações 10, 11 e 12 a seguir, para um concreto com  $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$ .

$$f_{cd1} = 0,85 \times \left(1 - \frac{30}{250}\right) \times f_{cd} \quad (\text{Equação 10})$$

Onde:

- $f_{cd}$  Resistência de cálculo à compressão do concreto (10000 x MPa).

$$f_{cd2} = 0,60 \times \left(1 - \frac{30}{250}\right) \times f_{cd} \quad (\text{Equação 11})$$

$$f_{cd3} = 0,72 \times \left(1 - \frac{30}{250}\right) \times f_{cd} \quad (\text{Equação 12})$$

### Metodologia

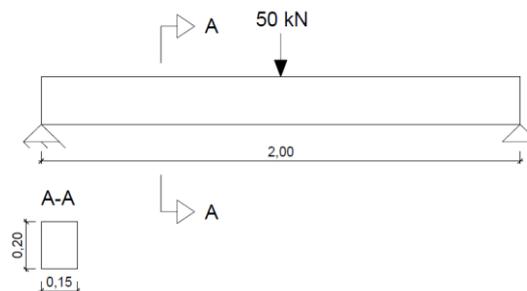
A análise proposta buscou obter resultados de deslocamentos de uma viga em concreto. Para isto, inicialmente elaborou-se, no *software* FTool, duas situações: primeiramente a viga em concreto

biapoiada com suas verdadeiras dimensões e uma carga pontual em seu centro equivalente a 50 kN; em seguida, a treliça idealizada através da metodologia de bielas e tirantes que representaria o comportamento global da viga com a mesma carga. Tendo isto, buscaram-se os deslocamentos nodais, tanto da viga, quanto da treliça. Em seguida, analisou-se a treliça em um algoritmo na linguagem Fortran, o qual seria capaz de fornecer dos dados de deslocamentos, reações de apoio e forças axiais de uma treliça plana. Assim, seria capaz de verificar a eficiência do *script* quando confrontados seus resultados com os obtidos pelo *software* FTool.

Tendo tais dados, buscou-se então as tensões em dois pontos da seção transversal da viga em concreto. Inicialmente, calculou-se estes valores através do equacionamento tradicional de mecânica de estruturas, que é dado pela razão do momento atuante no ponto multiplicado pela distância do ponto à linha neutra entre o momento de inércia da viga. Com isto, tentou-se encontrar novamente estas tensões nestes mesmos pontos através de outras duas metodologias: primeiramente, a tensão sendo dada pela força axial, gerando, com ela, um momento equivalente, sendo o braço de alavanca a distância do ponto à linha neutra da viga e, pela segunda metodologia, que se baseava em buscar a tensão através da razão entre a força axial da barra no ponto de análise e a área da seção transversal da viga de concreto.

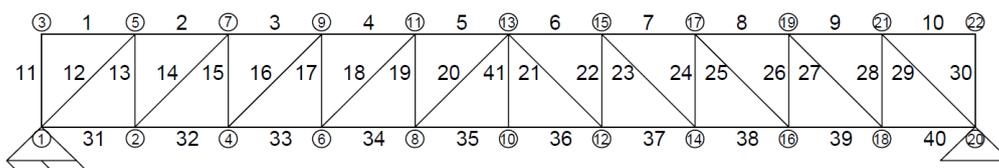
## Resultados e discussões

Como apresentado na seção sobre bielas e tirantes deste manuscrito, existem alguns modelos já idealizados de treliças. Estes são otimizados de acordo com a situação na qual melhor descrevem o caso real para simular. Neste estudo em específico, pretendeu-se analisar uma viga de concreto submetida a uma carga concentrada em seu eixo longitudinal de 50 kN. A peça teria dimensões de 0,2 m de altura, 0,15 m de largura e 2 m de extensão. Outro dado relevante é o módulo de elasticidade adotado, que é de 30000 MPa, além da área adotada para as barras, que representa 45% da área efetiva da viga, ou seja, 135 cm<sup>2</sup>. Para a análise, alguns dados não foram levados em consideração, como a fissuração do concreto, o módulo secante do material (fazendo-se uso apenas do módulo de elasticidade dele), além da não linearidade física. Veja uma representação do modelo na Figura 2 a seguir.



**Figura 2 – Viga analisada (Os autores)**

Para representar este elemento, inicialmente estudou-se uma geometria de treliça baseada no artigo escrito por Schlaich, Schäfer e Jennewein (1987). Esta é mostrada na Figura 3 a seguir.



**Figura 3 – Treliça idealizada – 1º versão (Os autores)**





Seguindo o descrito acima, calcula-se a tensão para o ponto P1:

$$\sigma = \frac{(50+75) \times 0,1 \times 0,1}{\frac{0,15 \times 0,20^3}{12}} = 12.500 \text{ kN/m}^2$$

O ponto P2 encontra-se em uma zona onde a barra a ser analisada é a inclinada. A força atuante nela é de compressão e possui uma intensidade de 35,4 kN. Aqui, o binário é dado utilizando esta mesma força duas vezes, como visto a seguir:

$$\sigma = \frac{2 \times (35,4 \times \cos(45^\circ)) \times 0,05 \times 0,05}{\frac{0,15 \times 0,20^3}{12}} = 1.251,58 \text{ kN/m}^2$$

Repare que, pela metodologia proposta, a tensão no ponto P1 é exatamente igual a encontrada pela formulação tradicional, enquanto para o P2, o resultado encontrado é bastante distante do valor real. Assim sendo, decidiu-se analisar o ponto P2 de outra forma: determinou-se a tensão usando as forças nas barras horizontes imediatamente acima e abaixo do ponto, como feito para P1, entretanto, utilizando o braço de alavanca do ponto P2, que nada mais é do que a distância dele à linha neutra. Em suma, a proposta aqui é determinar a tensão provocada pelo binário de forças encontradas nas faces superior e inferior da viga, porém as trazendo para a coordenada vertical do ponto P2. Assim, tem-se:

$$\sigma = \frac{(50+75) \times 0,1 \times 0,05}{\frac{0,15 \times 0,20^3}{12}} = 6.250 \text{ kN/m}^2$$

Assim, a tensão determinada pelo binário de forças ajustado à coordenada vertical do ponto é igual a tensão real analisada anteriormente.

Muito além, como visto anteriormente, a NBR 6118:2023 avalia a metodologia de bielas e tirantes aplicada a elementos estruturais, no que trata de tensões, quanto a região onde busca-se encontrar este esforço. De acordo com a Figura 7, a busca deste dado dá-se na viga de concreto a 50 cm do apoio à esquerda, sendo que o ponto P1 de análise está localizado na face superior da viga (biela da treliça) e o ponto P2 está localizado entre a linha neutra e a face superior da viga (biela da treliça). Com isto, o ponto P1 deve ser comparado com  $f_{cd3}$  (compressão-compressão-tração), assim como o ponto P2, já que ambas as barras da treliça ligam-se ao mesmo nó.

Para o cálculo desta tensão, basta dividir a força atuante na barra pela área da seção transversal da viga de concreto. Assim, para o ponto P1, tem-se a tensão:

$$\sigma = \frac{50}{0,20 \times 0,15} = 1.667 \text{ kN/m}^2$$

Esta tensão deve ser comparada com  $f_{cd3}$ , já que este é o parâmetro de resistência à tensão do concreto. Se  $\sigma \leq f_{cd3}$ , então, segundo a NBR 6118:2023, a viga estaria em segurança na área analisada. O parâmetro  $f_{cd3}$  é calculado na sequência.

$$f_{cd3} = 0,72 \times \left(1 - \frac{30}{250}\right) \times 30.000 = 19.008 \text{ kN/m}^2$$

Calculando a tensão para o ponto P2, tem-se:

$$\sigma = \frac{35,4 \times \sin(45^\circ)}{0,20 \times 0,15} = 834 \text{ kN/m}^2$$

Pela formulação dada pela ABNT NBR 6118:2023, ambas as tensões estariam dentro do limite de  $f_{cd3}$ . Nesta metodologia, apenas analisa-se a tensão através da formulação clássica, dada pela razão entre a força axial e a área da viga de concreto. É possível verificar que os dados não são equivalentes aos encontrados para a situação real.

## Conclusões

No que se trata de deslocamentos, pode-se observar uma ótima aproximação do resultado visto para a viga real, calculado no FTool quando comparado com o obtido através da formulação de bielas e tirantes. Tendo o *script* em linguagem Fortran trazido uma análise precisa, é possível afirmar que a análise de qualquer estrutura treliçada plana pode ser empregada nele, de maneira que o código traz resultados precisos e confiáveis. O mesmo pode ser dito para outros itens que não foram abordados neste trabalho, como reações de apoio, que também foram calculadas com precisão.

A análise tornou possível ainda avaliar os esforços axiais de cada barra da estrutura. Com estes dados, objetivou-se fazer uma aproximação da tensão observada na viga através da metodologia de bielas e tirantes. A Tabela 1 traz os dados resumidos das tensões avaliadas de diferentes maneiras nos pontos P1 e P2.

**Tabela 1 – Resultados das tensões nos pontos P1 e P2 pelas metodologias propostas**

PONTO	TENSÃO REAL NA VIGA (kN/m <sup>2</sup> )	TENSÃO PELO MOMENTO DA FORÇA NA BARRA (kN/m <sup>2</sup> )	TENSÃO PELA RELAÇÃO ENTRE FORÇA NA BARRA E ÁREA DA VIGA (kN/m <sup>2</sup> )
P1	12.500	12.500	1.667
P2	6.250	6.250	834

Com isto, é possível concluir que apenas a primeira metodologia conseguiu aproximar-se da tensão real no ponto de análise, com a ressalva que, para o ponto onde o ideal seria avaliar a força presente na barra inclinada da treliça, adaptou-se o método de momento binário utilizando as barras horizontais na mesma coordenada do ponto. Já na segunda metodologia, que não trouxe resultados comparáveis ao caso real, o problema pode estar na área de influência para o cálculo da tensão: nela, leva-se em conta a seção transversal da viga em concreto, utilizando a força na barra de análise. Esta metodologia pode ser útil para o que determina a NBR 6118:2023, que é a análise da tensão da seção da viga por completo, e não somente em um ponto específico dela.

## Referências bibliográficas

- AGUIAR, C. C. P. de. **Dimensionamento de estruturas especiais de concreto armado pelo método de bielas e tirantes**. 2018. 129 f. Dissertação de mestrado – Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- ABNT. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro: ABNT, 2023.
- BEER, F. P.; JOHNSTON JUNIOR, E. R. **Mecânica vetorial para engenheiros: estática**. 5 ed. Rio de Janeiro: Makron Books, 1990.
- CUNHA, M. C. C. **Métodos numéricos**. Editora da Unicamp, Campinas, 2000.
- HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. 7 ed. Pearson Prentice Hall, São Paulo.
- LEONHARDT, F.; MÖNNIG, E. **Construções de concreto**. Rio de Janeiro: Interciência, 1977-1979.
- OLIVEIRA, C. J. de; STEFFEN, L. O.; VOGUEL, G. M.; NUNES, R. B.; SANTOS, G. M. dos. Aplicação do *software* Excel como ferramenta de ensino para resolução de treliças planas utilizando elementos finitos de barras. **Revista Tecnologia**. dez. 2019. Disponível em: <<https://ojs.unifor.br/tec/article/view/9903>>. Acesso em 26 de agosto de 2024.
- SORIANO, H. L. **Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.
- SCHLAICH, J.; SCHÄFER, K.; JENNEWEIN, M. Toward a Consistent Design of Structural Concrete. **PCI Journal**. mai. - jun. 1987. Disponível em



[https://www.pci.org/PCI\\_Docs/Publications/PCI%20Journal/1987/May-June/Toward%20a%20Consistent%20Design%20of%20Structural%20Concrete.pdf](https://www.pci.org/PCI_Docs/Publications/PCI%20Journal/1987/May-June/Toward%20a%20Consistent%20Design%20of%20Structural%20Concrete.pdf). Acesso em 26 de agosto de 2024.

em