

Análise Computacional da Punção em Lajes com Vazios Esféricos Submetidas a Cargas Assimétricas

Gabriel Hubert Silva¹, Paula Manica Lazzari², Eric Renã Zavitzki Schimanowski³

¹ Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) / gabrihubertsilva@gmail.com

² (UFRGS) / Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGEC) / p.manica.lazzari@gmail.com

³ UFRGS / PPGEC / ezschimanowski@gmail.com

Resumo

O sistema de lajes lisas é conhecido por não apresentar nervuras, vigas ou outro tipo de reforço estrutural que crie uma divisão visível na laje, oferecendo simplicidade na execução, economia de materiais, rapidez na construção e maior aproveitamento do espaço interno. Entretanto, devido à ausência de vigas, torna-se necessário o aumento da espessura da laje para vencer grandes vãos, impactando não apenas no consumo de materiais, mas também no peso total da estrutura. Em busca de melhorar a eficiência das lajes lisas, é comum a utilização de volumes ocos em seu interior, como os vazios esféricos, que geram a redução do peso próprio da laje sem comprometer excessivamente seu desempenho. Entretanto, esses vazios aumentam a suscetibilidade à falha por punção, devido à redução do volume de concreto em regiões próximas ao pilar. Essa geometria complexa dificulta a análise analítica do comportamento da laje, sendo necessária a utilização de métodos experimentais ou numéricos. Embora os estudos sobre lajes lisas sejam amplos, poucos tratam da punção quando são empregados vazios esféricos. Assim, o objetivo deste trabalho é utilizar métodos computacionais para estudar o comportamento da punção em lajes com vazios esféricos submetidas a cargas assimétricas e, desse modo, expandir o entendimento sobre o assunto. Para isso, foi modelada uma laje lisa com vazios esféricos, por meio de um *script* em linguagem APDL. Partindo desse modelo, foram realizadas simulações computacionais no *software* ANSYS, e obtidos resultados da relação carga por deslocamento. Foram aplicados deslocamentos em dois pontos distintos da laje, com relações de 1:1, 7:3, 8:2 e 9:1. Analisando os resultados, verificou-se que, quanto maior a assimetria dos deslocamentos aplicados, menor a carga de ruptura da laje. Comparando com o carregamento simétrico, as reduções de capacidade de carga encontradas foram iguais a 8,90% para 7:3, 16,33% para 8:2 e 16,92% para 9:1.

Palavras-chave

Punção; ANSYS; Método dos Elementos Finitos; Simulação numérica; Cargas Assimétricas.

Introdução

As lajes são elementos estruturais horizontais fundamentais em construções, responsáveis por distribuir as cargas aplicadas sobre elas — como o peso de pessoas, móveis e outros objetos — para as vigas, paredes ou pilares de suporte. Elas podem variar em tipo e forma, dependendo das necessidades do projeto, da carga a ser suportada e do orçamento disponível.

No sistema de lajes lisas de concreto, as lajes são planas e contínuas, sem a presença de nervuras, vigas ou qualquer outro tipo de reforço estrutural que crie divisões visíveis na laje. Elas oferecem diversas vantagens em projetos estruturais, especialmente em edificações comerciais e residenciais de múltiplos andares. Uma de suas principais vantagens é a maior liberdade arquitetônica, permitindo a criação de ambientes mais flexíveis (Silva, 2022). Do ponto de vista construtivo, as lajes lisas também facilitam a execução das fôrmas e das armaduras, diminuindo o tempo e o custo da obra. Como não há vigas, o processo de montagem das fôrmas é mais barato e

proporciona uma racionalização na construção (Ferreira *et al.*, 2023). Isso se reflete em maior produtividade e menor necessidade de mão de obra especializada.

Entretanto, segundo Schimanowski (2024), na análise estrutural das lajes lisas deve-se estar atento ao fenômeno da punção, que pode ocorrer devido à ausência de vigas. Assim, a análise precisa desse efeito permite definir corretamente a armadura de reforço e as dimensões dos elementos estruturais, evitando falhas localizadas que comprometam o desempenho da edificação.

Além disso, em busca de maior eficiência, é comum a utilização de volumes ocos no interior das lajes, o que reduz o peso próprio sem comprometer excessivamente seu desempenho. Porém, o emprego de geometrias mais complexas dificulta a análise analítica de seu comportamento, exigindo o uso de métodos experimentais ou numéricos. Nesse contexto, embora os estudos sobre lajes lisas sejam amplos, poucos tratam da punção quando são empregados vazios esféricos.

Dessa forma, o objetivo desse artigo é utilizar o Método dos Elementos Finitos (MEF), por meio de ferramenta computacional, para estudar o comportamento da punção em lajes com vazios esféricos submetidas a cargas assimétricas e, desse modo, expandir o entendimento sobre o assunto.

Características da modelagem numérica

A modelagem numérica de estruturas é o processo de representar matematicamente e simular, computacionalmente, o comportamento de uma estrutura física — como lajes, vigas ou pórticos — para prever sua resposta a cargas, restrições e o comportamento de diferentes materiais. Nela, a geometria, as propriedades dos materiais e as condições de contorno são traduzidas em equações que descrevem o equilíbrio e a deformação da estrutura. O método mais usado é o MEF, que divide a estrutura em pequenas partes (elementos) interligadas em pontos (nós), permitindo calcular deslocamentos, tensões e esforços internos de forma aproximada, mas precisa o suficiente para engenharia.

Esse tipo de modelagem permite analisar sistemas complexos que seriam inviáveis de resolver apenas pelos métodos analíticos. Além de economizar tempo e custos em relação a ensaios físicos, possibilita testar virtualmente diferentes cenários, como sobrecargas, variações de temperatura ou eventos extremos. No entanto, a qualidade dos resultados depende fortemente da modelagem da estrutura. Por isso, os resultados da modelagem numérica devem ser validados com experimentos ou comparações com soluções conhecidas.

Dessa forma, este artigo fundamenta-se na estrutura e nos materiais empregados no estudo de Schimanowski (2024) para realizar a análise paramétrica de uma laje com esferas vazias. Neste estudo, o autor desenvolveu e validou modelos numéricos de lajes lisas com e sem vazios esféricos, comparando-os com resultados experimentais de 19 protótipos. Após a validação, esses modelos foram usados para uma análise paramétrica, avaliando como diferentes variáveis — como posição, quantidade e diâmetro das esferas, espessura da laje, taxa de armadura, presença de pré-laje, características do pilar e armadura de cisalhamento — influenciam a falha por punção e o comportamento carga-deslocamento.

No presente trabalho, o *software* utilizado para a modelagem computacional é o ANSYS (*Analysis Systems Incorporated*), versão 2025 R1. O ANSYS é um *software* de simulação numérica amplamente utilizado na engenharia para análise estrutural, térmica, de fluidos, eletromagnética e multifísica. Ele permite prever o comportamento de componentes e sistemas antes da fabricação, reduzindo custos e tempo de desenvolvimento. Sua base é o MEF e, dependendo do módulo, também pode empregar métodos como diferenças finitas ou volumes finitos.

Para a definição da geometria e demais parâmetros da análise utilizou-se o ANSYS APDL (*ANSYS Parametric Design Language*), que é a linguagem de comando tradicional do ANSYS *Mechanical*, usada principalmente para criar, configurar e controlar análises numéricas por meio de

scripts e comandos textuais, em vez de interfaces gráficas. Ela é utilizada para facilitar a automação, parametrização e flexibilidade avançada no processo de modelagem numérica.

Para a modelagem numérica do concreto, adotou-se o modelo constitutivo implementado e utilizado por Lazzari *et al.* (2017), Lazzari *et al.* (2020), Machado *et al.* (2023), entre outros. No modelo adotado, o concreto submetido à compressão foi caracterizado como elastoplástico, utilizando o critério de ruptura de Ottosen, endurecimento isotrópico e regra de endurecimento baseada no comportamento uniaxial. Para o concreto tracionado, assumiu-se um comportamento linear até a ruptura, seguido de amolecimento após a fissuração. No ANSYS, esse comportamento foi empregado através da rotina *USERMAT* e é explicado mais detalhadamente em Schimanowski (2024).

Para o aço, utilizou-se um modelo constitutivo elastoplástico com endurecimento linear, assumindo que as barras de armadura suportam somente esforços axiais. No software, esse comportamento foi implementado por meio do modelo *Bilinear Isotropic Hardening* (BISO), presente na biblioteca do ANSYS.

No MEF, os elementos são unidades básicas que dividem a estrutura em pequenas partes para aproximar seu comportamento físico. Neste trabalho, para a modelagem do concreto foram utilizados elementos tetraédricos do tipo SOLID186, que possuem 10 nós com movimentação em três direções e adotam funções de interpolação quadráticas. Já para a consideração das armaduras, utilizou-se o modelo incorporado por meio do elemento de reforço REINF264, que atua dentro dos elementos base. Dessa forma, cada barra de reforço é modelada individualmente, suportando apenas esforços axiais de tração ou compressão.

Características da laje modelada

A laje modelada possui formato quadrado, com 250 cm de lado e 28 cm de espessura, contendo esferas vazias de 22,5 cm de diâmetro. No centro dessa laje está localizado um pilar de seção circular com 30 cm de diâmetro, altura superior de 80 cm e inferior de 50 cm, cujas extremidades estão rigidamente engastadas.

As armaduras de flexão são de aço CA-50, dispostas com espaçamento alternado de 10 cm e 15 cm, diâmetro de 12,5 mm e cobrimento de 2,5 cm. As telas utilizadas para fixação das esferas são de aço CA-60, com barras de 6 mm na malha superior e 8 mm na malha inferior, também com espaçamento alternado entre 10 cm e 15 cm. Adicionalmente, foram incluídos ganchos em todo o perímetro da laje, adotando as mesmas especificações das armaduras de flexão.

Além disso, foram modeladas as treliças de içamento, porém segundo Schimanowski (2024), devido à posição no modelo experimental, essas treliças não apresentaram impacto significativo no comportamento da estrutura submetida à punção.

Também foram modeladas placas quadradas de 15 cm de lado para distribuir a carga aplicada. Isso foi necessário, pois no MEF, aplicar a carga de forma distribuída, em vez de concentrá-la em um ponto, é fundamental para evitar singularidades de tensão e resultados irreais, já que cargas pontuais raramente existem na prática. A distribuição da carga representa melhor as condições físicas de contato, proporciona maior estabilidade numérica e garante campos de tensão e deformação mais consistentes.

Outro aspecto importante é a utilização da simetria na simulação numérica, que consiste em modelar apenas uma parte da estrutura — nesse caso, um quarto da laje — quando sua geometria, carregamentos e condições de contorno são simétricos. Isso reduz significativamente o número de elementos e o tempo de processamento, mantendo a precisão dos resultados. Nas regiões de corte, aplicam-se condições de simetria que reproduzem o comportamento da parte não modelada, garantindo que o modelo reduzido represente o sistema completo. Essa técnica é muito usada no

Método dos Elementos Finitos para otimizar recursos computacionais sem comprometer a qualidade da análise.

Em relação às propriedades dos materiais, foi utilizado para a laje e o pilar um concreto com resistência característica à compressão de $2,2 \text{ kN/cm}^2$ e coeficiente de Poisson de 0,2. Para a armadura de flexão a tensão de escoamento utilizada foi de $57,7 \text{ kN/cm}^2$ e coeficiente de Poisson de 0,3. Para a modelagem das esferas apenas removeu-se material. Para as placas de aplicação dos deslocamentos foi considerado um material com uma alta rigidez.

A malha de elementos finitos utilizada foi a mesma para todas as situações de deslocamento e foi definida como uma malha livre, gerada de forma automática pelo *software*. Vale ressaltar que para garantir que houvessem nós nos pontos de aplicação do deslocamento, foram geradas linhas que coincidisse com esses pontos. Além disso, as linhas que delimitam as esferas vazias foram subdivididas para garantir que os volumes vazios não se sobrepusessem às armaduras. É importante destacar que a variação da malha pode resultar em uma variação nos resultados, principalmente onde há concentrações de tensões ou gradientes elevados.

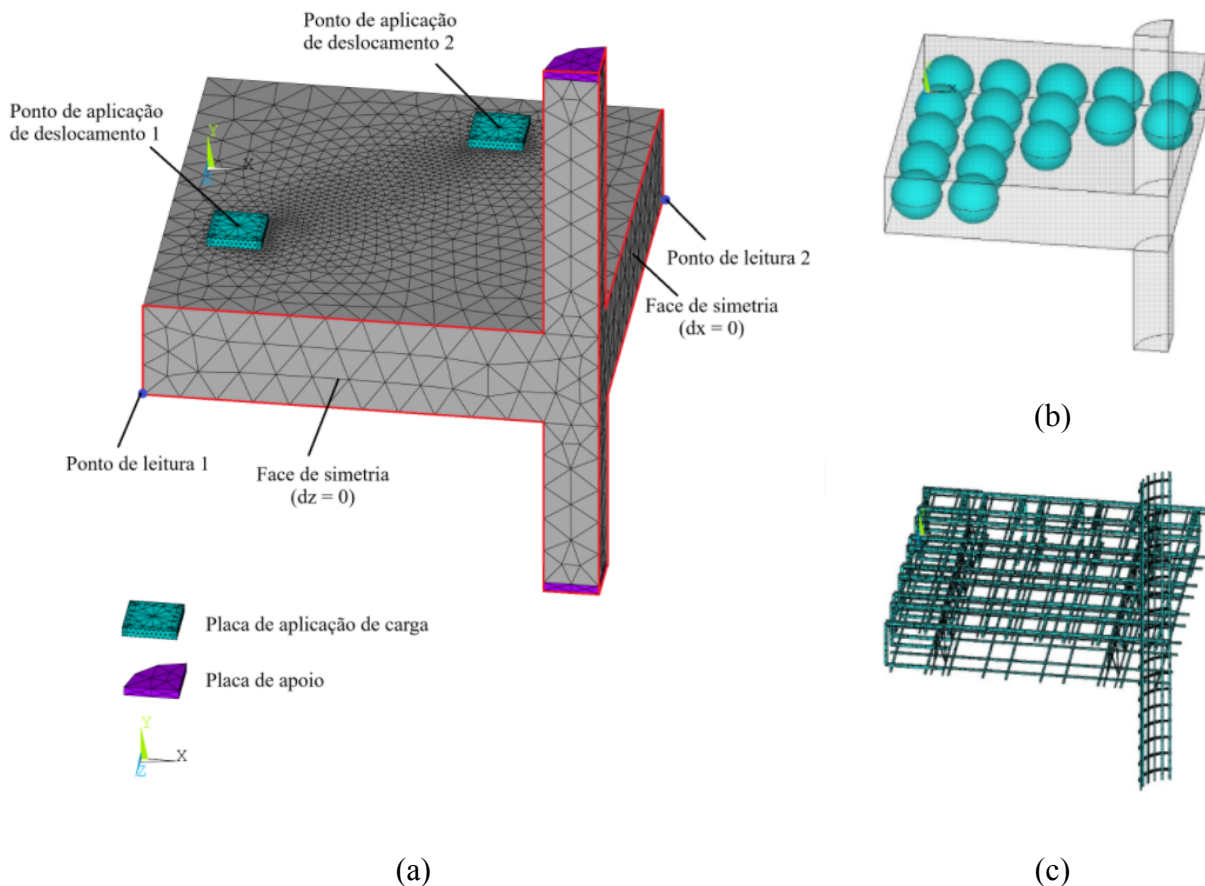


Figura 1 – Características da modelagem (a) malha de elementos finitos, (b) posicionamento dos vazios esféricos e (c) armaduras.

Simulação numérica

Com o objetivo de analisar o comportamento da laje modelada, foi inicialmente considerada uma condição de carregamento simétrico, caracterizada pela aplicação de deslocamentos idênticos em ambas as placas. Em seguida, foram analisadas três situações distintas de carregamento assimétrico, aplicando deslocamentos nas placas com relações de 7:3, 8:2 e 9:1.

Para todas as análises, foram adotadas três etapas em relação à simulação do carregamento. A primeira correspondendo ao período entre a fabricação do material e o dia anterior ao ensaio, contemplando os efeitos da retração. Na segunda, considerou-se a ação do peso próprio ao longo de um dia, representando a retirada das fôrmas da estrutura. Por fim, para a etapa de ensaio, foram aplicados incrementos de deslocamento nas proporções supracitadas.

Resultados e discussões

A partir das simulações realizadas, foram elaborados gráficos que relacionam a carga aplicada à laje com os deslocamentos obtidos nos pontos de leitura, localizados nas extremidades inferiores, próximos às placas de aplicação do carregamento, conforme ilustrado na Figura 1a.

Analisando a Figura 2a, é possível identificar um comportamento semelhante aos encontrados em outros trabalhos, isso reforça a validade do modelo, demonstra consistência com a literatura e confirma a confiabilidade dos procedimentos adotados.

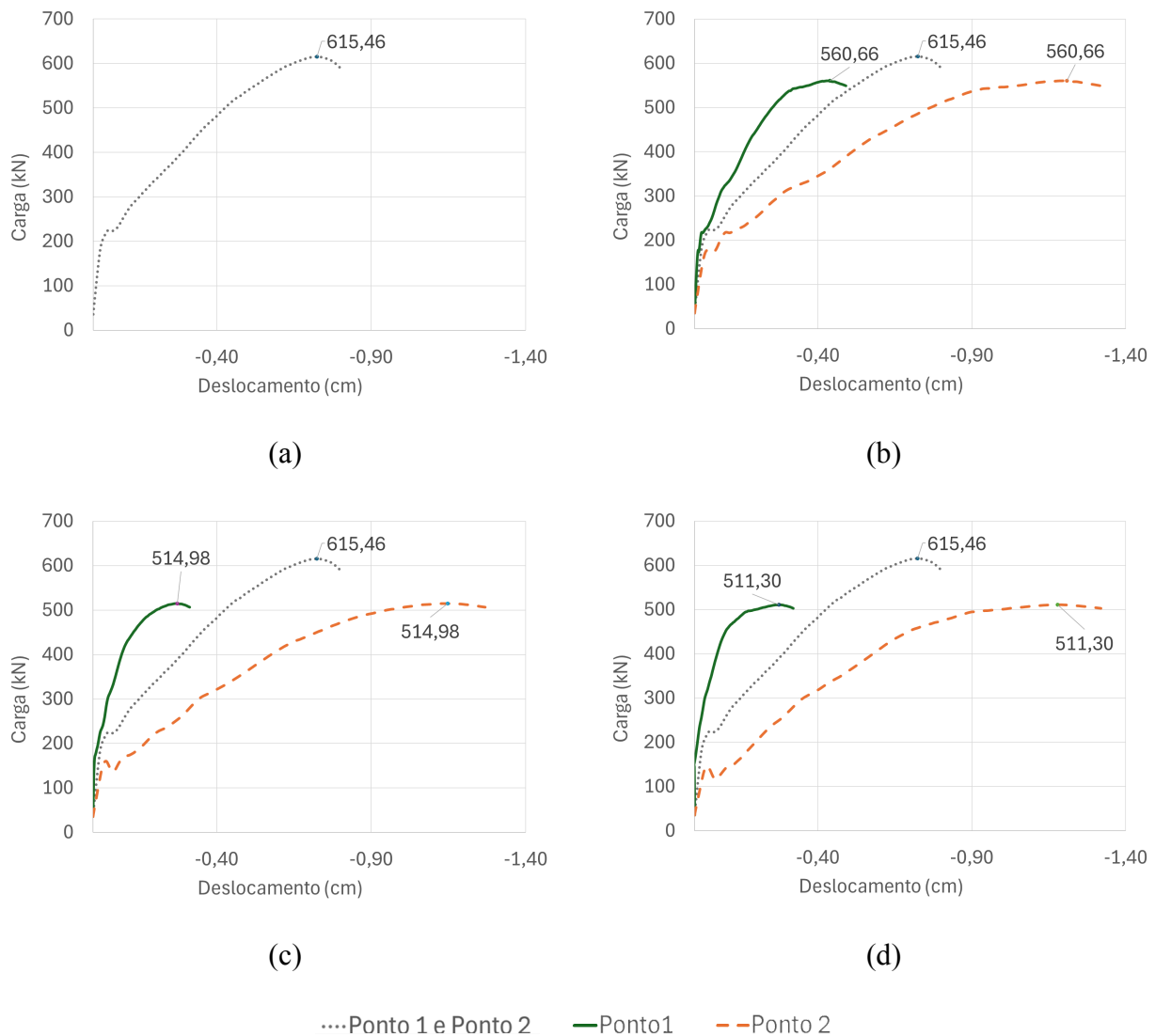


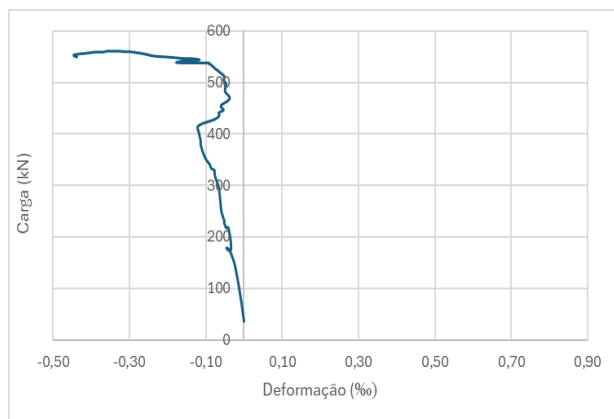
Figura 2 – Deslocamentos nos pontos de leitura (a) Simétrico, (b) 7:3, (c) 8:2 e (d) 9:1.

Observando as Figuras 2a, 2b e 2c, verificou-se que, quanto maior a assimetria dos deslocamentos aplicados, menor a carga de ruptura da laje. Comparando com o carregamento simétrico, as reduções de capacidade de carga encontradas foram iguais a 8,90% para 7:3, 16,33% para 8:2 e 16,92% para 9:1, como pode ser observado na Tabela 1.

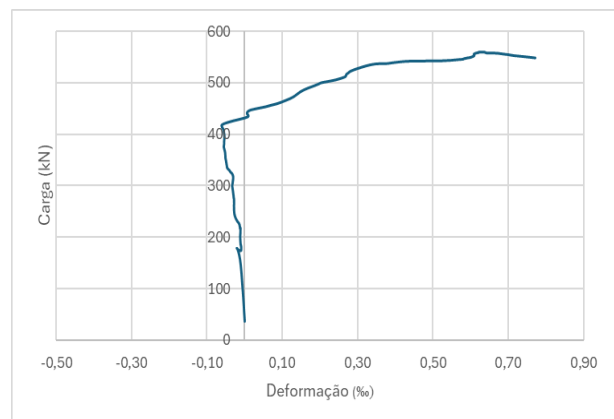
Tabela 1 – Redução da capacidade de carga.

Caso	Carga Máx.(kN)	Redução
1:1	615,46	-
7:3	560,66	8,90%
8:2	514,98	16,33%
9:1	511,30	16,92%

Outros resultados interessantes obtidos são apresentados na Figura 3, que mostra os valores de carga em função da deformação do concreto em dois pontos próximos ao pilar. O ponto da Figura 3a está localizado na face inferior da laje, a 5 cm do pilar, junto à face do plano YZ que intercepta o eixo do pilar. Já a Figura 3b apresenta os valores de um ponto semelhante, porém situado a 10 cm do pilar. Ambos os gráficos referem-se à simulação considerando deslocamentos com relação de 7:3.



(a)



(b)

Figura 3 – Deformações nos pontos próximos ao pilar (a) 5 cm, (b) 10 cm.

Nos gráficos, observa-se que as deformações inicialmente são negativas e decrescem até atingirem determinado valor, após o qual ocorre uma mudança de comportamento. Essa transição está associada à fissura principal de falha por punção e à consequente redistribuição dos esforços, sendo um comportamento característico de lajes submetidas à punção, conforme descrito em detalhes por Einpaul (2016). Esse comportamento pode ser verificado na Figura 4, em que, antes da ruptura, toda a região inferior próxima ao pilar encontra-se predominantemente comprimida; entretanto, com a formação do tronco de cone, no instante da ruptura ou próximo a ela, os esforços se redistribuem e essa região passa a ser tracionada. No caso analisado, com relação de 7:3, esse fenômeno é claramente identificado, ainda que a fissuração também ocorra nas esferas.

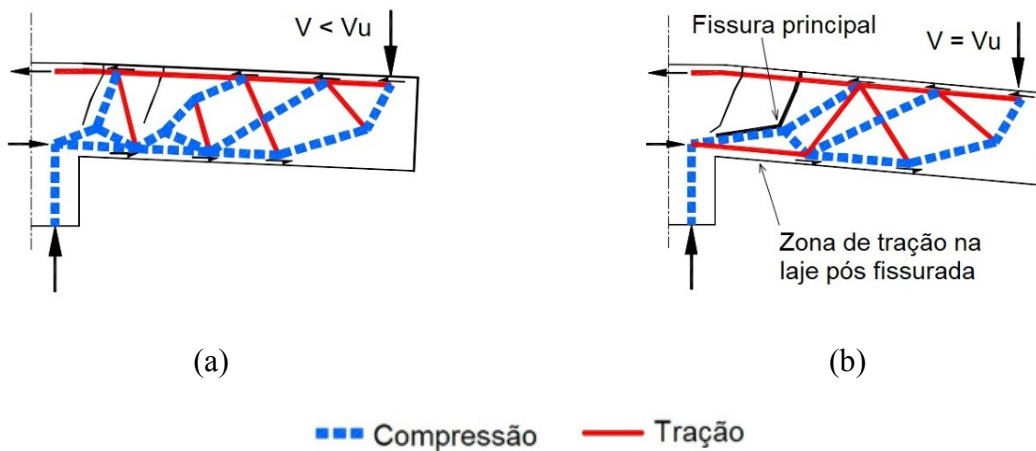


Figura 4 – Bielas e tirantes (a) antes e (b) após o colapso por punção (Fonte: Adaptado de Guandalini (2005)).

Nas Figuras 5, 6, 7 e 8 são apresentadas as distribuições das deformações principais de tração na laje para cada uma das simulações no momento de maior carga resistente. Na Figura 4, é possível visualizar a formação do cone de punção, que é a região cônica que se desenvolve em lajes lisas quando submetidas a um carregamento. Em lajes lisas, sem nervuras ou reforços locais, os esforços concentram-se em uma área próxima ao pilar, e ao ultrapassar a resistência do concreto, a deformação se propaga formando um cone invertido.

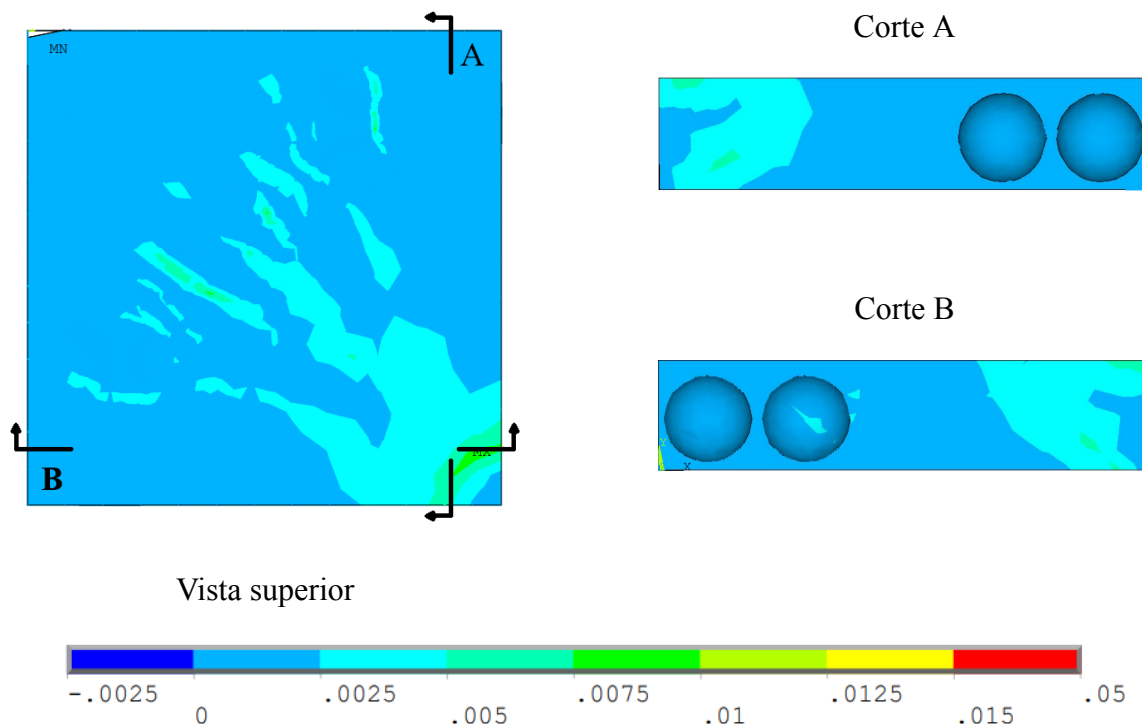


Figura 5 – Deformação principal de tração na laje com carregamento simétrico.

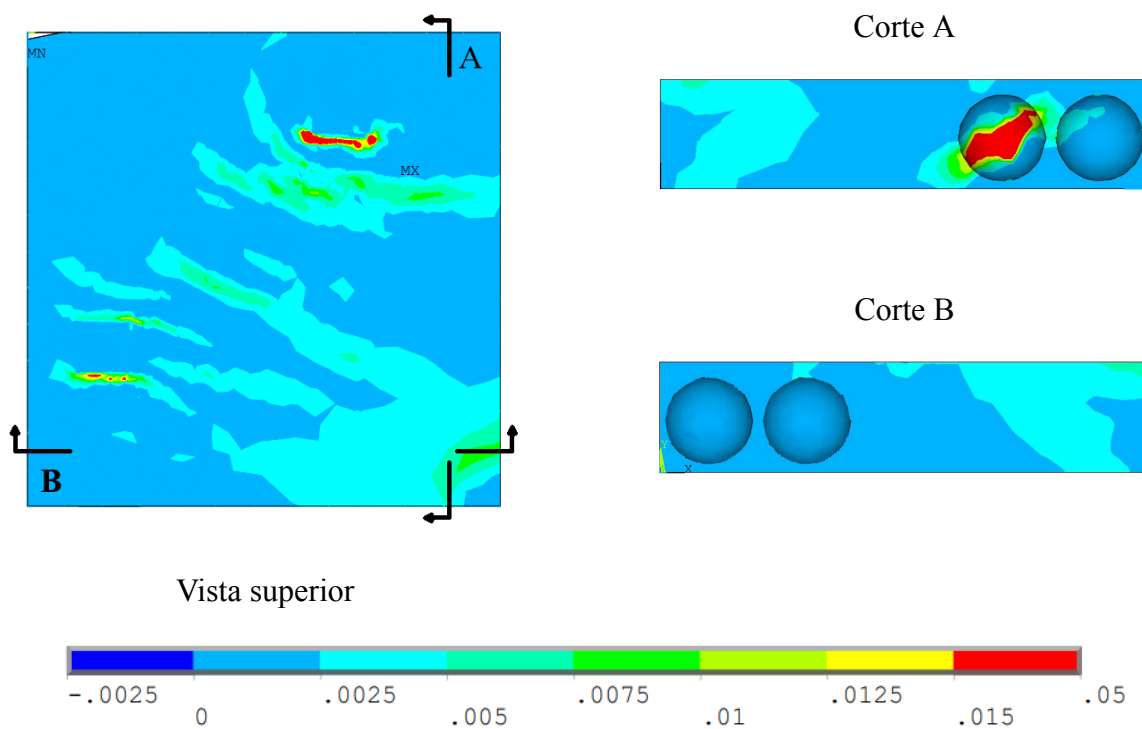


Figura 6 – Deformação principal de tração na laje com carregamento 7:3.

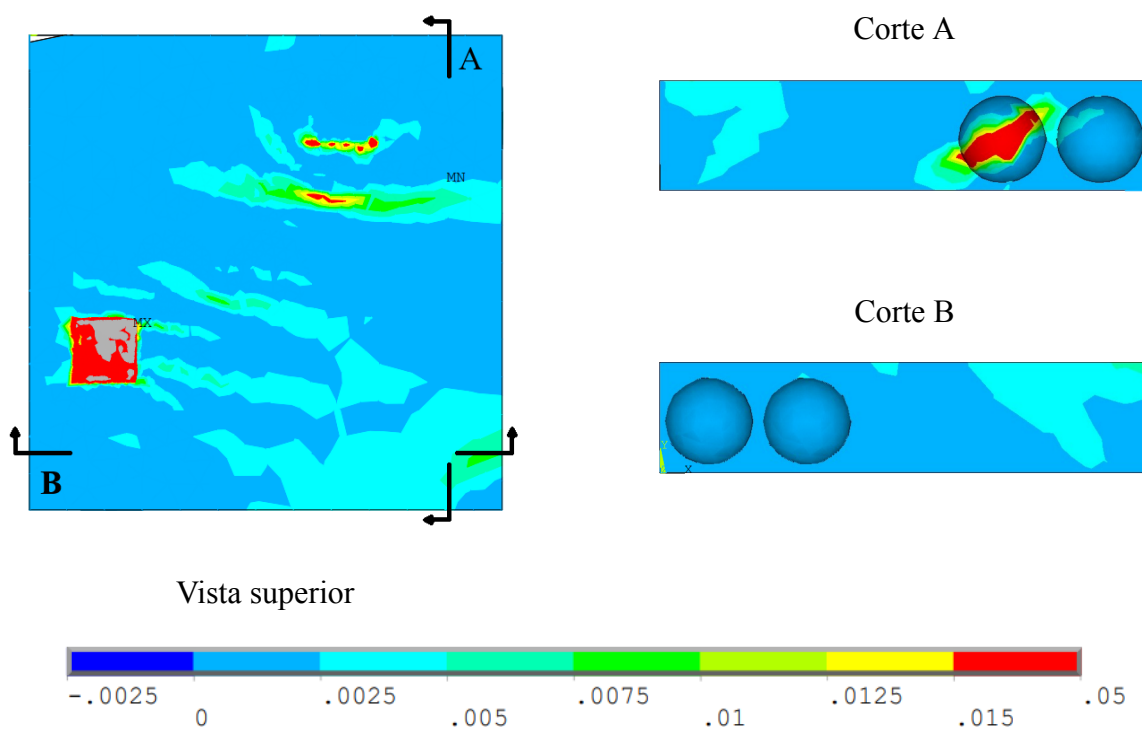


Figura 7 – Deformação principal de tração na laje com carregamento 8:3.

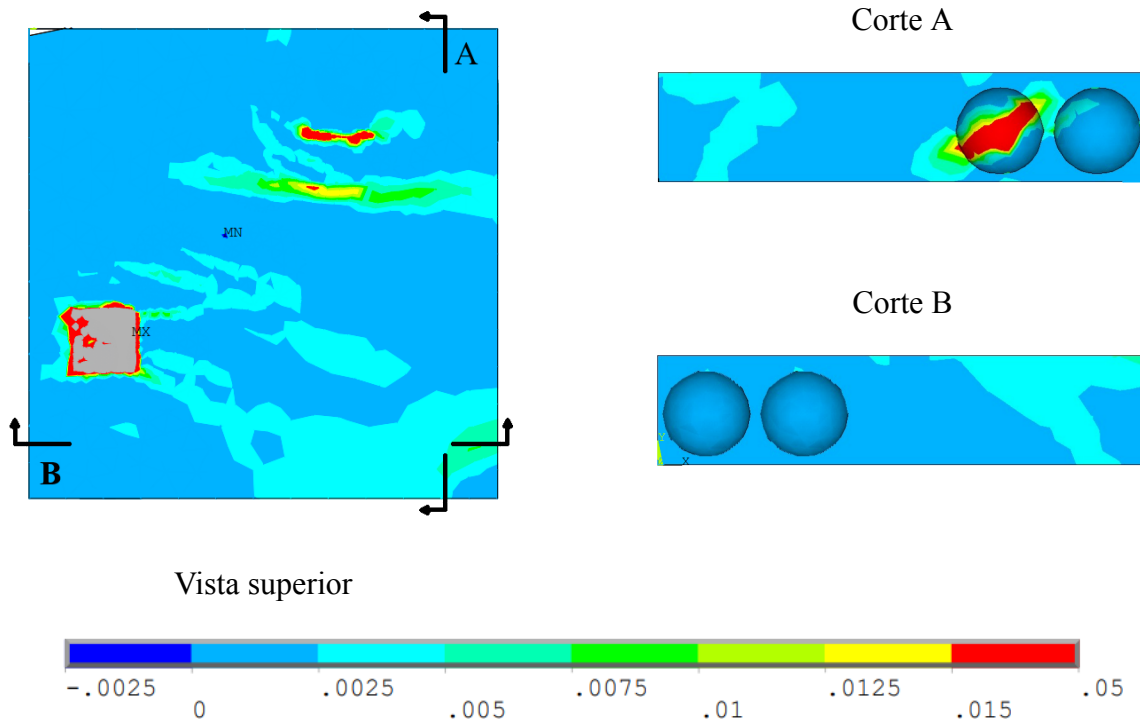


Figura 8 – Deformação principal de tração na laje com carregamento 9:1.

Observando as Figuras 6, 7 e 8, percebe-se que as regiões de maiores esforços se afastam do pilar e se aproximam da placa com o maior deslocamento. Esse comportamento explica a redução da capacidade máxima de carga, uma vez que esses esforços interceptam a região dos vazios esféricos, que possuem uma menor seção de concreto.

Além disso, nas Figuras 6 e 7, é importante destacar a ocorrência de regiões de grandes esforços junto à placa de aplicação do menor deslocamento, já que, devido ao nível de desbalanceamento das cargas e à rigidez da placa, essa superfície fica tracionada.

Conclusões

Empregando a simulação numérica de uma laje lisa com vazios esféricos, foi possível obter gráficos de carga por deslocamento semelhantes aos encontrados em outros trabalhos, confirmando a coerência da modelagem realizada. Foram aplicados deslocamentos em dois pontos distintos da laje, com relações de 1:1, 7:3, 8:2 e 9:1, e os resultados mostraram que, quanto maior a assimetria dos deslocamentos aplicados, menor a carga de ruptura da laje. Em comparação ao carregamento simétrico, as reduções de capacidade de carga foram de 8,90% para 7:3, 16,33% para 8:2 e 16,92% para 9:1.

Através dos gráficos de distribuição de tensões, foi possível identificar a formação do cone de punção, característico desse tipo de laje, bem como a distorção nele provocada pela aplicação de cargas assimétricas. Nessas condições, as maiores deformações concentram-se em seções com esferas vazias e, conseqüentemente, menor volume de concreto, reduzindo a capacidade resistente da laje.



Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – pelo apoio na realização deste estudo.

Referências

- EINPAUL, J. Punching strength of continuous flat slabs. École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Lausanne, 2016.
- FERREIRA, D. B.; TRAUTWEIN, L. M.; VIRGENS, J. P. d.; GOMES, R. B.; ALMEIDA, L. C. d. Experimental analysis of concrete flat slabs with internal stud-type shear reinforcement. IBRACON de Estruturas e Materiais Vol. 16, No. 3, 2023.
- GUANDALINI, S. Poinçonnement symétrique des dalles en béton armé. École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2005.
- LAZZARI, B. M.; CAMPOS FILHO, A.; LAZZARI, P. M.; PACHECO, A. R. Using element embedded rebar model in Ansys for the study of reinforced and prestressed concrete structures. Computers and Concrete, Vol. 19, No. 4, p. 347–356, 2017.
- LAZZARI, P. M.; CAMPOS FILHO, A.; LAZZARI, B. M.; PACHECO, A. R.; RENAN, R. S. G. Numerical simulation of the constructive steps of a cable-stayed bridge using Ansys. Structural Engineering and Mechanics, Vol. 69, No. 3, p. 269–281, 2019.
- MACHADO, G. G.; CAMPOS FILHO, A.; LAZZARI, P. M.; LAZZARI, B. M.; PACHECO, A. R. Numerical simulation by the Finite Element Method of the constructive steps of a precast prestressed segmental bridge. Structural Eng. and Mechanics, Vol. 85, 2023.
- SCHIMANOWSKI, E. R. Z. Análise da punção em lajes com vazios esféricos através do Método dos Elementos Finitos. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2024.
- SILVA, G. R. Confiabilidade estrutural de lajes lisas: Estado limite último à punção. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2022.