

Análise da Confiabilidade Estrutural Não Linear de Treliças Planas com o uso de Redes Neurais Artificiais

Marcos Wilson Ogata¹, Herbert Martins Gomes²

¹ UFRGS / PPGECC / marcos.ogata@hotmail.com

² UFRGS / PROMEC / herbert@mecanica.ufrgs.br

Resumo

Estruturas treliçadas se destacam por aliarem leveza e alta resistência, sendo amplamente utilizadas em obras com grandes vãos, como pontes, passarelas e coberturas de galpões industriais. Com o objetivo de projetar estruturas mais seguras e econômicas, diversas técnicas de confiabilidade estrutural foram desenvolvidas nos últimos anos. No entanto, integrar análises estruturais a essas técnicas é desafiador, pois, muitas vezes, a análise de uma estrutura envolve o uso de modelos computacionais complexos, que demandam um tempo considerável de processamento. Isto dificulta a implementação de métodos de simulação, como a de Monte Carlo Simples, que requer um grande número de amostras para produzir resultados satisfatórios. Além disto, obras de grande porte frequentemente estão sujeitas a efeitos de não linearidade geométrica e física, o que eleva o custo computacional de cada simulação. Visando superar essa barreira, o presente trabalho propõe o uso de redes neurais artificiais como modelos substitutos, que aproximam a resposta do modelo original com significativa redução no tempo de execução de cada análise, viabilizando o uso de algoritmos de confiabilidade em projetos estruturais complexos. Estudou-se o problema de *benchmark* de uma treliça plana de 10 barras com uma função de estado limite de deslocamento máximo. Para validar a metodologia proposta, inicialmente o problema foi resolvido com análise elástico-linear. Em seguida, adotou-se uma curva tensão-deformação bilinear do material para modelar a não linearidade física e, juntamente a ela, realizou-se uma análise não linear geométrica com o método incremental e iterativo de Newton-Raphson. Os resultados demonstraram que o uso de redes neurais reduziu em mais de 90% o tempo de processamento das simulações, em comparação ao método de Monte Carlo Simples. Além disso, foram necessárias menos amostras no treinamento das redes neurais, mantendo um erro inferior a 2% nas estimativas da probabilidade de falha e do índice de confiabilidade.

Palavras-chave

Confiabilidade Estrutural, Redes Neurais Artificiais, Treliças Planas, Machine Learning.

Introdução

Treliças são estruturas amplamente utilizadas na construção civil em razão de sua ótima relação custo-benefício, resultado da combinação entre leveza estrutural e elevada resistência mecânica. Devido a esta característica, elas são especialmente indicadas para estruturas que vencem grandes vãos, como pontes, passarelas, coberturas de galpões industriais, entre outros. Além disto, as treliças também encontram aplicação em edifícios altos e torres de linha de transmissão (Felipe *et al.*, 2021).

Para garantir a segurança e o desempenho dessas estruturas, é essencial considerar em sua análise as incertezas inerentes ao projeto e à execução, tais como variações nas propriedades dos materiais,

imperfeições geométricas e, principalmente, incertezas nos carregamentos atuantes. Assim, a análise de confiabilidade estrutural permite estimar a probabilidade de falha associada a uma condição de projeto específica. Neste contexto, diversos autores vêm propondo metodologias que integram a confiabilidade à análise estrutural de treliças, como Nguyen *et al.* (2025) e Zhao *et al.* (2024), contribuindo para aprimorar a avaliação da segurança estrutural frente às incertezas envolvidas.

Em estruturas de médio e grande porte, frequentemente se faz necessário recorrer a modelos numéricos complexos que incorporam efeitos não lineares de natureza geométrica e/ou física. No entanto, esse nível de refinamento aumenta significativamente o custo computacional de uma análise, o que dificulta sua aplicação em métodos baseados em simulações como o de Monte Carlo Simples, que exige milhares de análises estruturais para se produzir estimativas satisfatórias da probabilidade de falha. Para contornar essa limitação, Viet-Hung e Seung-Eock (2018) utilizam uma variação da técnica de amostragem por importância combinada com amostragem por hipercubo latino para realizar a otimização baseados em confiabilidade de diversos problemas inelásticos. Nguyen *et al.* (2025), por outro lado, investigam o uso de modelos substitutos, que aproximam a função de estado limite original, para reduzir o tempo de processamento na avaliação da confiabilidade.

Assim, o presente trabalho propõe o uso de Redes Neurais Artificiais (RNA) como modelos substitutos para avaliar a confiabilidade estrutural de treliças planas, incorporando os efeitos da não linearidade geométrica e física. A RNA adotada é do tipo perceptron multicamadas (MLP), composta por uma camada de entrada, uma camada oculta e uma de saída. Para validação da metodologia, é analisado um problema de *benchmark* envolvendo uma treliça plana com 10 barras, com uma função de estado limite de deslocamento vertical máximo. Primeiramente o problema é resolvido considerando análise elástico-linear. Em seguida, o problema é reformulado para incorporar a não linearidade geométrica e física. A principal contribuição deste estudo é demonstrar a viabilidade e a precisão de uma abordagem baseada em redes neurais como meta-modelo aplicado à avaliação da confiabilidade de estruturas não lineares, permitindo uma análise eficiente sem comprometer a representação dos efeitos físicos relevantes.

Confiabilidade Estrutural

A análise de confiabilidade estrutural visa quantificar os efeitos provocados pelas incertezas presentes no projeto, na execução e ao longo da vida útil das estruturas, fornecendo uma estimativa da probabilidade de falha associada a um determinado critério de desempenho. Considerando que uma estrutura está sujeita a m fontes de incerteza, cada uma delas é representada por uma variável aleatória X_i , caracterizada por suas propriedades estatísticas e as respectivas distribuições de probabilidade. Essas variáveis são então agrupadas em um vetor aleatório $\mathbf{X} = [X_1 \cdots X_i \cdots X_m]$, utilizado na modelagem da função de estado limite $g(\mathbf{X})$, a qual é definida de tal forma que:

- $g(\mathbf{X}) > 0$: condição de segurança;
- $g(\mathbf{X}) \leq 0$: ocorrência de falha.

A probabilidade de falha P_f é definida pela integral da função densidade de probabilidades conjunta $f_{\mathbf{X}}$ do vetor aleatório $\mathbf{X}$ sobre o domínio de falha $D_f = \{\mathbf{x} \mid g(\mathbf{x}) \leq 0\}$:

$$P_f = P(g(\mathbf{X}) \leq 0) = \int_{D_f} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \cong \Phi(-\beta) \quad (1)$$

onde $\Phi(\cdot)$ é a função de distribuição normal acumulada e β o índice de confiabilidade, considerando uma distribuição gaussiana não correlacionada. Como essa integral raramente possui solução analítica, diversos métodos numéricos foram desenvolvidos para estimar P_f , como por exemplo: métodos que aproximam a função de estado limite (FORM, SORM); técnicas baseadas em simulação,

como o Monte Carlo e suas variantes (Simulação por Subconjuntos, Amostragem por Importância); métodos que usam Modelos Substitutos, também chamados de Meta-modelos, para aproximar a função de estado limite original (Redes Neurais Artificiais, Krigagem, Superfícies de Resposta); entre outros diversos métodos (Sudret *et al.*, 2012). No presente trabalho, adota-se o método de Monte Carlo Simples (MCS) como referência para validação dos resultados obtidos posteriormente com a implementação do modelo substituto a partir de uma rede neural artificial.

O MCS consiste, inicialmente, na geração de um conjunto de n amostras de $\mathbf{X}$, onde se avalia a função de estado limite g em cada uma. Em seguida, aplicam-se as amostras em uma função indicadora $I(\mathbf{x})$, que assume o valor 1 se $g(\mathbf{x}) < 0$, e 0 caso contrário. Assim, a probabilidade de falha P_f é obtida pela integração ao longo de todo o domínio da função de estado limite $D = D_s \cup D_f$, ou seja:

$$P_f = \int_D I(\mathbf{x}) f_{\mathbf{x}} d\mathbf{x} = E[I(\mathbf{x})] \quad (2)$$

Note que, por esta definição, P_f corresponde ao valor esperado da função indicadora $E[I(\mathbf{x})]$. Desta forma, para um conjunto de n amostras, se obtém a estimativa da probabilidade de falha por:

$$P_f \approx \hat{P}_f = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(\mathbf{x}_i) = \frac{n_f}{n} \quad (3)$$

sendo n_f a quantidade de amostras que estão no domínio de falha. Como se trata de uma estimativa, este valor possui uma variância associada. Pode-se demonstrar que, para uma probabilidade de falha da ordem de 10^{-p} , e visando um coeficiente de variação da probabilidade de falha (CV_{P_f}) inferior a 10%, o método de Monte Carlo Simples requer aproximadamente 10^{p+2} amostras (Beck, 2019).

Estruturas civis são projetadas para apresentar probabilidades de falha extremamente baixas, da ordem de 10^{-4} ou ainda menores. Para estimar com confiabilidade essa ordem de grandeza usando MCS, seria necessárias simulações com mais de 1 milhão de amostras, o que se torna inviável quando o modelo estrutural incorpora não linearidades e/ou elevado custo computacional por avaliação. Este cenário reforça a necessidade do uso de modelos substitutos, como as redes neurais artificiais, que viabilizam a aplicação de métodos baseados em simulação mesmo em problemas complexos. Desta forma, para garantir sua precisão, recomendam-se valores para o coeficiente de variação da probabilidade de falha (CV_{P_f}) abaixo de 5% (Gomes, 2001; Dang *et al.*, 2024).

Análise Não Linear de Estruturas

Entre as diversas fontes de não linearidade em estruturas treliçadas, destacam-se a não linearidade geométrica e a não linearidade física. A primeira torna-se relevante em estruturas cujas deformações são suficientemente grandes a ponto de alterar a distribuição dos esforços internos. A segunda decorre do modelo constitutivo não linear do material, afetando a caracterização de suas propriedades mecânicas, como o módulo de elasticidade tangente, módulo de cisalhamento, tenacidade à fratura, entre outros. Assim, ela se torna fundamental no estudo de materiais cujas curvas tensão-deformação apresentam trechos não lineares (Nguyen *et al.*, 2025; Viet-Hung e Seung-Eock, 2018).

Para resolver problemas não lineares em estruturas, McGuire *et al.* (2014) destacam a necessidade de uma abordagem incremental e iterativa, que seja capaz de incorporar as alterações nos esforços internos decorrentes das deformações acumuladas durante a evolução do carregamento. Nesta metodologia, a carga total aplicada na estrutura é dividida em N_{step} incrementos. A divisão do carregamento em etapas permite acompanhar a evolução da resposta estrutural, especialmente em situações em que as propriedades mecânicas e a geometria da estrutura alteram de forma significativa ao longo da deformação. Em cada passo de carga, um sistema de equações não lineares é resolvido por meio de métodos numéricos iterativos como o de Newton-Raphson, por exemplo. Nele o sistema

de equações é linearizado em torno de um ponto de aproximação inicial e atualizado iterativamente até atingir o equilíbrio com uma tolerância prescrita tol , ou até alcançar o número limite de iterações N_{iter} . A linearização do sistema em cada iteração se dá por meio da obtenção da matriz de rigidez tangente da estrutura $\mathbf{K}_t$. Ela leva em consideração os efeitos físicos, por meio da matriz de rigidez do material $\mathbf{K}_m$, e os efeitos geométricos, por meio da matriz de rigidez geométrica $\mathbf{K}_g$. Esta matriz é então atualizada em cada iteração, com base no estado atual da estrutura.

Para modelar a não linearidade física do material, adotou-se neste trabalho uma lei constitutiva bilinear, onde o primeiro trecho corresponde ao regime elástico com módulo de elasticidade tangente $E_t = E_0$, enquanto o segundo trecho se encontra no regime plástico com módulo igual a $E_t = \alpha E_0$, com $\alpha < 1$. Nesse contexto, os dados de entrada necessários para se resolver a estrutura com não linearidade física e geométrica incluem: matriz de coordenadas $coor$; matriz de conectividades $cone$; matriz com os índices dos graus de liberdade restritos $restr$; as constantes do material, como tensão de escoamento σ_y , razão de encruamento α e módulo de elasticidade inicial E_0 ; o vetor $\mathbf{A}$ com as áreas da seção transversal de cada elemento da estrutura; a tolerância tol do critério de convergência para encerrar o laço iterativo; o número de passos de carga N_{step} ; o número máximo de iterações N_{iter} ; a quantidade total de elementos da estrutura N_{elem} ; e o vetor de forças externas $\mathbf{F}_{ext}$.

Na metodologia apresentada, o passo de carga foi considerado constante e igual a $1 / N_{step}$. Em cada iteração, determina-se o regime do j -ésimo elemento e o respectivo módulo de elasticidade E_t . Com este valor, obtém-se a matriz de rigidez do material $\mathbf{K}_m^{(j)}$ para a treliça plana da seguinte forma:

$$\mathbf{K}_m^{(j)} = \frac{E_t A^{(j)}}{L_0^{(j)}} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

onde $L_0^{(j)}$ é o comprimento inicial do j -ésimo elemento, $A^{(j)}$ é a respectiva área da seção transversal, $c = \cos \phi$ e $s = \sin \phi$ são os cossenos diretores da barra que compõe a estrutura. A contribuição dos esforços internos axiais na rigidez da estrutura, por outro lado, é dada pela matriz de rigidez geométrica (não-corrotacional) de cada elemento $\mathbf{K}_g^{(j)}$, calculada por:

$$\mathbf{K}_g^{(j)} = \frac{N}{L} \begin{bmatrix} s^2 & -sc & -s^2 & sc \\ -sc & c^2 & sc & -c^2 \\ -s^2 & sc & s^2 & -sc \\ sc & -c^2 & -sc & c^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

sendo L o comprimento atual da barra, $N = \sigma A^{(j)}$ a força interna axial do j -ésimo elemento quando submetido a uma tensão normal σ , calculada de acordo com o regime do material. Salienta-se que o valor desta tensão foi calculado pela definição da deformação de engenharia $\varepsilon = (L - L_0) / L$, e não a partir da definição verdadeira, de natureza logarítmica. Assim sendo, a não linearidade geométrica empregada neste trabalho trata-se de uma versão simplificada, sem a utilização de um sistema corrotacional. Com o valor de N também é possível calcular o vetor de forças internas atualizado de cada elemento $\mathbf{F}_e^{(j)}$, por meio da expressão:

$$\mathbf{F}_e^{(j)} = N \begin{bmatrix} -c & -s & c & s \end{bmatrix}^T \quad (6)$$

Ele é usado para montar o vetor de forças internas global na i -ésima iteração $\mathbf{F}_{int}^{(i)}$. Finalmente, as matrizes de rigidez geométrica e física de cada elemento são agrupadas para formar a matriz de rigidez tangente global $\mathbf{K}_t^{(i)}$. Este processo de montagem é feito pela seguinte operação:

$$\mathbf{K}_t^{(i)} = \bigcup_{j=1}^{N_{elem}} (\mathbf{K}_m^{(j)} + \mathbf{K}_g^{(j)}) \quad (7)$$

Com ela, resolve-se o sistema de equações linearizado da i -ésima iteração para obter o incremento de deslocamento $d\mathbf{U}^{(i)}$:

$$\mathbf{K}_t^{(i)} d\mathbf{U}^{(i)} = \mathbf{R}^{(i)} \quad (8)$$

onde $\mathbf{R}^{(i)}$ é o vetor de forças desequilibradas, calculada por:

$$\mathbf{R}^{(i)} = \mathbf{F}_{ext}^{(k)} - \mathbf{F}_{int}^{(i)} \quad (9)$$

O laço iterativo é encerrado quando $\|\mathbf{R}\| \leq tol$ ou quando $k = N_{iter}$. Após a execução de todos os passos de carga e atingido o equilíbrio, obtém-se a configuração deformada final da estrutural, com seu respectivo vetor de deslocamentos global $\mathbf{U}$. A Figura 1 apresenta um pseudocódigo listando as principais etapas envolvidas no método incremental e iterativo.

Algoritmo 1 Método Incremental e Iterativo de Newton-Raphson

```

1: inputs: coor, cone, restr,  $\sigma_y$ ,  $\alpha$ ,  $E_0$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $tol$ ,  $N_{step}$ ,  $N_{iter}$ ,  $N_{elem}$ ,  $\mathbf{F}_{ext}$ 
2: Inicializa  $\mathbf{U}$ 
3: for  $k = 1, N_{step}$  do ▷ Método Incremental
4:    $\mathbf{F}_{ext}^{(k)} \leftarrow (k/N_{steps}) \mathbf{F}_{ext}$ 
5:   for  $i = 1, N_{iter}$  do ▷ Método Iterativo de Newton-Raphson
6:     Inicializa  $\mathbf{K}_t^{(i)}$  e  $\mathbf{F}_{int}^{(i)}$ 
7:     for  $j = 1, N_{elem}$  do
8:       Atualiza  $L$ ,  $\cos\phi$  e  $\sin\phi$ 
9:        $\varepsilon \leftarrow (L - L_0^{(j)}) / L$ 
10:       $\sigma_0 \leftarrow \varepsilon E_0$ 
11:      if  $|\sigma_0| \leq \sigma_y$  then
12:         $E_t \leftarrow E_0$ 
13:         $\sigma \leftarrow \sigma_0$ 
14:      else
15:         $E_t \leftarrow \alpha E_0$ 
16:         $\sigma \leftarrow \text{sign}(\varepsilon) \cdot [\sigma_y + E_t \cdot (|\varepsilon| - \sigma_y/E_0)]$  ▷ Modelo Bilinear
17:       $N \leftarrow \sigma A^{(j)}$ 
18:      Calcula  $\mathbf{K}_m^{(j)}$  e  $\mathbf{K}_g^{(j)}$ 
19:       $\mathbf{K}_e^{(j)} \leftarrow \mathbf{K}_m^{(j)} + \mathbf{K}_g^{(j)}$ 
20:      Calcula  $\mathbf{F}_e^{(j)}$ 
21:       $\mathbf{K}_t^{(i)} \leftarrow \mathbf{K}_t^{(i)} + \mathbf{K}_e^{(j)}$ 
22:       $\mathbf{F}_{int}^{(i)} \leftarrow \mathbf{F}_{int}^{(i)} + \mathbf{F}_e^{(j)}$ 
23:     $\mathbf{R}^{(i)} \leftarrow \mathbf{F}_{ext}^{(k)} - \mathbf{F}_{int}^{(i)}$  ▷ Calcula o resíduo nos graus de liberdade ativos
24:    if  $\|\mathbf{R}^{(i)}\| < tol$  then
25:      break
26:    Resolver sistema  $\mathbf{K}_t^{(i)} d\mathbf{U}^{(i)} = \mathbf{R}^{(i)}$ 
27:     $\mathbf{U}^{(i+1)} \leftarrow \mathbf{U}^{(i)} + d\mathbf{U}^{(i)}$ 
28: return  $\mathbf{U}$  ▷ Deslocamentos finais após todos os incrementos

```

Figura 1 – Pseudocódigo do método incremental e iterativo para problemas não lineares

Redes Neurais Artificiais como Modelos Substitutos

Uma das estratégias mais eficazes para reduzir o custo computacional de uma simulação complexa consiste na construção de modelos substitutos (ou meta-modelos). Tais modelos aproximam a resposta do modelo original, proporcionando uma redução significativa no tempo de processamento, sem comprometer a precisão dos resultados. Diversos modelos substitutos têm sido explorados na literatura técnica, incluindo superfícies de resposta, modelos baseados em Krigagem, expansões em polinômios de caos, redes neurais artificiais, entre outros (Dubourg *et al.*, 2013). Dentre essas técnicas, as redes neurais artificiais se destacam pela sua capacidade de aproximar funções altamente não lineares e multivariadas de forma eficiente. Com base neste fato, Gomes (2001) ressalta o potencial de uso das redes neurais para aplicações em problemas de confiabilidade estrutural.

Neste trabalho optou-se pelo uso de um meta-modelo baseado em uma rede neural artificial. Para construí-lo, foram aplicadas técnicas de aprendizado de máquina supervisionado, nas quais a rede é treinada a partir de um conjunto de amostras de entrada e saída previamente conhecido. Em estudos de confiabilidade, as entradas correspondem ao vetor de variáveis aleatórias $\mathbf{X}$, enquanto a saída alvo é o valor correspondente da função de estado limite $g(\mathbf{X})$, calculado com base no modelo original.

A qualidade do modelo substituto depende fortemente da escolha do plano de amostragem adequado. Nesse contexto, uma das técnicas mais utilizadas é a amostragem por hiberno latino, pela sua capacidade de distribuir amostras de forma eficiente e não correlacionada no espaço probabilístico das variáveis aleatórias. No entanto, quando o objetivo é estimar probabilidades de falhas muito pequenas, como é o caso de estruturas civis, torna-se desejável o uso também de estratégias de amostragem adaptativa. Elas permitem concentrar mais amostras próximas ao limite de falha, melhorando a precisão do modelo onde ela é mais necessária. Foi utilizada neste trabalho uma estratégia de amostragem adaptativa baseada em aprendizado ativo, na qual um conjunto grande de pontos candidatos é gerado com hiberno latino e avaliado utilizando o meta-modelo. Os pontos mais promissores, ou seja, aqueles mais próximos do limite de falha, são selecionados para avaliação no modelo de alta fidelidade, refinando a aproximação na fronteira de falha em um novo treinamento.

As RNAs consistem basicamente em modelos computacionais de aprendizado de máquina inspirados no funcionamento do sistema nervoso biológico, composto por diversas unidades de processamento, chamadas de neurônios artificiais, que estão interconectadas em camadas de forma distribuída, operando paralelamente para processar informações e realizar diversas tarefas, como regressão e classificação, por exemplo (Gomes e Awruch, 2004). Cada neurônio aplica uma função de ativação sobre uma combinação linear ponderada de suas entradas, permitindo que a rede represente funções não lineares. No presente estudo, foi adotada uma rede do tipo perceptron multicamadas (do inglês MLP) com arquitetura feedforward, ou seja, onde os sinais fluem apenas no sentido da entrada para a saída, sem conexões recorrentes, por exemplo (Haykin, 2009).

Foram construídas três camadas: uma de entrada com m neurônios, onde m representa a dimensão de $\mathbf{X}$; uma camada oculta, com $h = 2m+1$ neurônios; e uma camada de saída, com um único neurônio, que corresponde ao valor aproximado de $g(\mathbf{X})$. As funções de ativação escolhidas para a camada oculta foram do tipo tangente hiperbólica, limitada no intervalo $[-1, +1]$. Para a camada de saída, por se tratar de um problema de regressão, foi adotada uma função de ativação linear, que pode produzir qualquer valor real. Assim, definindo os pesos $w_{i,k}^{(1)}$ da camada de entrada, seus vieses $b_k^{(1)}$, os pesos $w_{i,k}^{(1)}$ da camada oculta e seu viés $b_l^{(2)}$, se constrói o modelo substituto baseado em rede neural pela seguinte equação de regressão $\hat{g}(\mathbf{X})$ para aproximar a função de estado limite original:

$$\hat{g}(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^h w_{k,1}^{(2)} \tanh \left(\sum_{i=1}^m w_{i,k}^{(1)} X_i + b_k^{(1)} \right) + b_1^{(2)} = \sum_{k=1}^h w_{k,1}^{(2)} \tanh(a_k) + b_1^{(2)} \quad (10)$$

A arquitetura que representa este modelo substituto é ilustrada na Figura 2. Para fazer o treinamento desta RNA, foi utilizado o método de otimização não linear do erro quadrático médio de Levenberg-Marquadt, amplamente discutido em Haykin (2009).

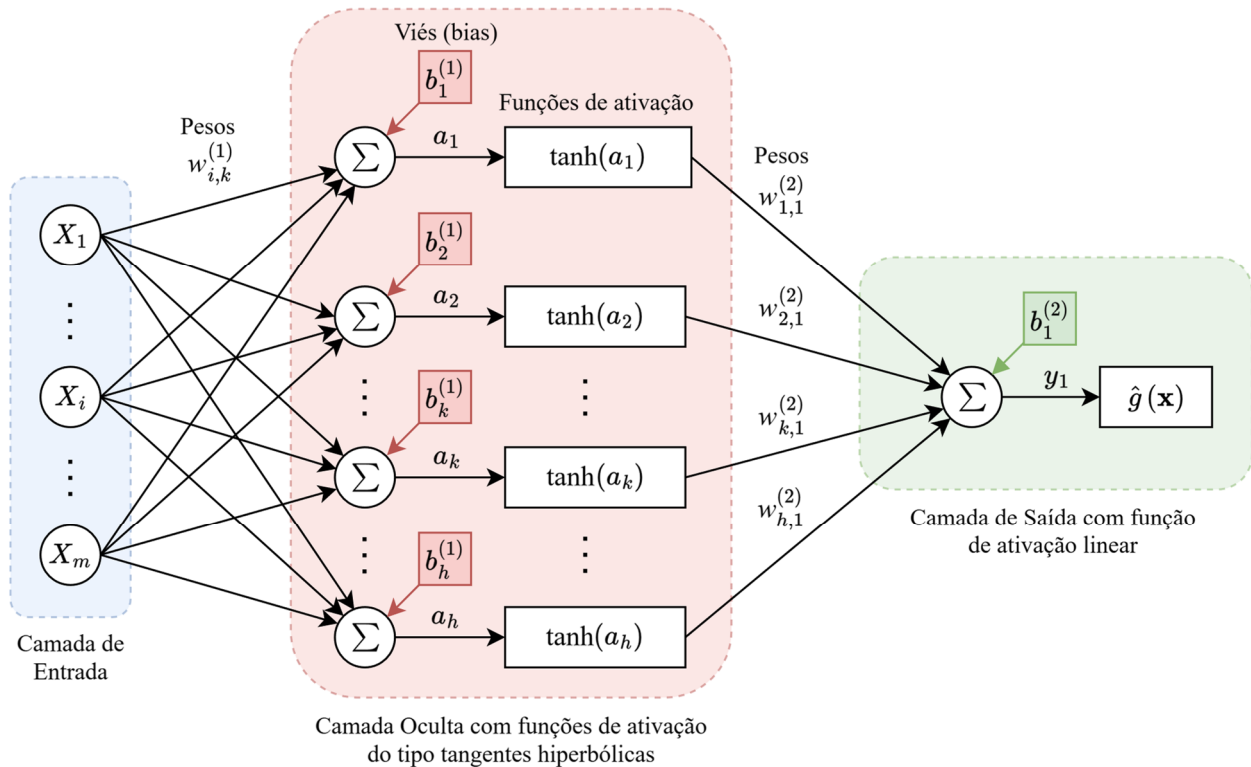


Figura 2 – Arquitetura da rede neural artificial adotada no trabalho

Uma vez construído o modelo substituto, pode-se usar ele no lugar da função de estado limite original para realizar uma simulação de Monte Carlo, chamando o meta-modelo centenas de milhares de vezes sem consumo significativo do tempo de processamento. Assim, neste trabalho, a esse método integrado de meta-modelagem com redes neurais e Monte Carlo se deu o nome de RNA-MCS.

Estudo de Caso

O problema consiste em determinar a probabilidade de falha e o respectivo índice de confiabilidade de uma treliça plana de 10 barras com lei constitutiva bilinear (Figura 3).

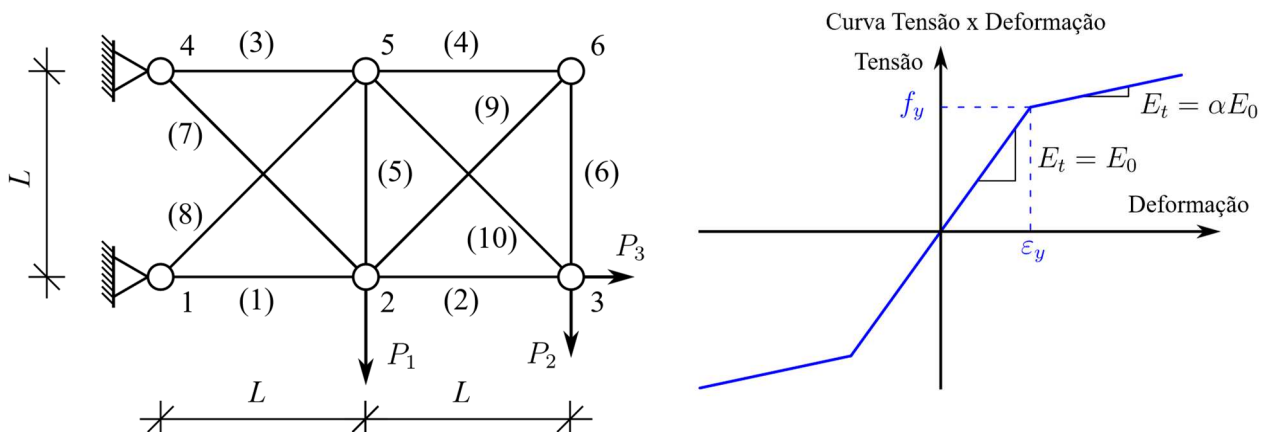


Figura 3 – Problema da treliça de 10 barras

Este é um dos exemplos de *benchmark* estudado por Ghasemi *et al.* (2019), onde foram investigados alguns métodos de otimização estrutural baseada em confiabilidade, usando como função de estado limite o deslocamento vertical do nó 3, considerando uma análise elástico linear. Os autores impuseram como uma das restrições de projeto o índice de confiabilidade mínimo de 2.50. Com isto, se chegou nas menores áreas possíveis para as seções transversais que compõem a treliça plana. Uma adaptação dessa estrutura, considerando não linearidade física e geométrica, também foi discutida em um dos problemas de confiabilidade estrutural estudados por Nguyen *et al.* (2025), onde foram usados algoritmos de aprendizado de máquina para se resolver o problema.

Feitas essas considerações, o presente trabalho usou a modelagem feita por Ghasemi *et al.* (2019) da treliça de 10 barras, para possibilitar a validação do código implementado em ambiente MATLAB®. Assim, as variáveis aleatórias consideradas no estudo se encontram listadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Variáveis aleatórias consideradas no estudo

Variável Aleatória	Distribuição	Média	Coefficiente de Variação (CV)
P_1 (N)	Normal	60×10^3	0,20
P_2 (N)	Normal	40×10^3	0,20
P_3 (N)	Normal	10×10^3	0,20
E_0 (Pa)	Normal	2,00E+11	0,10
L_0 (m)	Normal	1	0,05

A função de estado limite, por outro lado, é expressa por:

$$g(X) = 1 - \frac{y(X)}{\delta_{\lim}} \quad (11)$$

onde $\delta_{\lim}$ é o deslocamento vertical limite e $y(X)$ é o deslocamento vertical no nó 3, função do vetor de variáveis aleatórias X .

Para validar a metodologia proposta, se resolveu primeiramente um problema linear, semelhante ao de Ghasemi *et al.* (2019). Foi adotado o vetor de áreas da solução ótima obtida pelos autores, sendo igual a $A = [10.000, 5.042, 14.028, 1.000, 1.000, 1.000, 9.000, 10.000, 1.000, 10.000] \times 10^{-4} \text{ m}^2$. O deslocamento limite $\delta_{\lim}$, por outro lado, foi considerado igual a 0.004 m, para garantir que as barras da estrutura se encontram no regime elástico e linear. Assim, foi criada uma linha de base usando MCS com 1 milhão de amostras, para comparar o desempenho com os resultados obtidos com o modelo substituto. Finalmente, a Tabela 2 apresenta os resultados obtidos com o MCS e RNA-MCS para este problema, chegando em valores de β próximos aos obtidos por Ghasemi *et al.* (2019).

Tabela 2 – Comparação dos resultados para o problema linear

Variável	MCS	RNA-MCS	
	1000000 amostras	500 amostras	
	Valor	Valor	Diferença relativa
P_f	6.0490E-03	6.0660E-03	0.281%
CV_{P_f}	1.2819E-02	1.2801E-02	0.140%
β	2.5093E+00	2.5083E+00	0.040%
Tempo (min)	8.28	0.52	93.720%

Percebe-se que o método proposto consegue aproximar os valores da função original com precisão elevada, produzindo erros menores que 1%. Além disto, para gerar estes resultados, a RNA precisou de apenas 500 amostras para ser treinada e um tempo de processamento de aproximadamente 30 segundos para fazer o treinamento e a simulação de Monte Carlo, representando uma redução de mais de 90% no custo computacional em comparação com MCS.

Com a metodologia proposta validada, adaptou-se a modelagem deste problema a fim de considerar efeitos não lineares. Para isto, considerou-se uma razão de encruamento igual a $\alpha = 0.05$ e uma tensão de escoamento $\sigma_y = 172.4$ MPa. Os valores de P_1 , P_2 e P_3 tiveram seus valores médios majorados em 50%, resultando em 90×10^3 N, 60×10^3 N e 15×10^3 N, respectivamente. O deslocamento limite foi alterado para $\delta_{lim} = 0.006$, para permitir que efeitos não lineares surjam. Foram executados 100 incrementos de carga em cada análise, com um número máximo de iterações de 100. Tais valores foram definidos com base em um estudo de estabilidade e convergência do método proposto.

Para definir a quantidade de amostras, realizou-se um estudo de convergência de P_f e β , resultando no gráfico da esquerda na Figura 4. Percebe-se por ele que a estimativa do meta-modelo para a probabilidade de falha tem seu primeiro valor estabilizado em aproximadamente 800 amostras, a partir da qual são seguidas de pequenas oscilações. Isto evidencia que o aumento excessivo de amostras não necessariamente traz mais precisão ao modelo substituto. Logo, realizar um estudo de convergência em função do número de amostras se faz extremamente necessário na meta-modelagem.

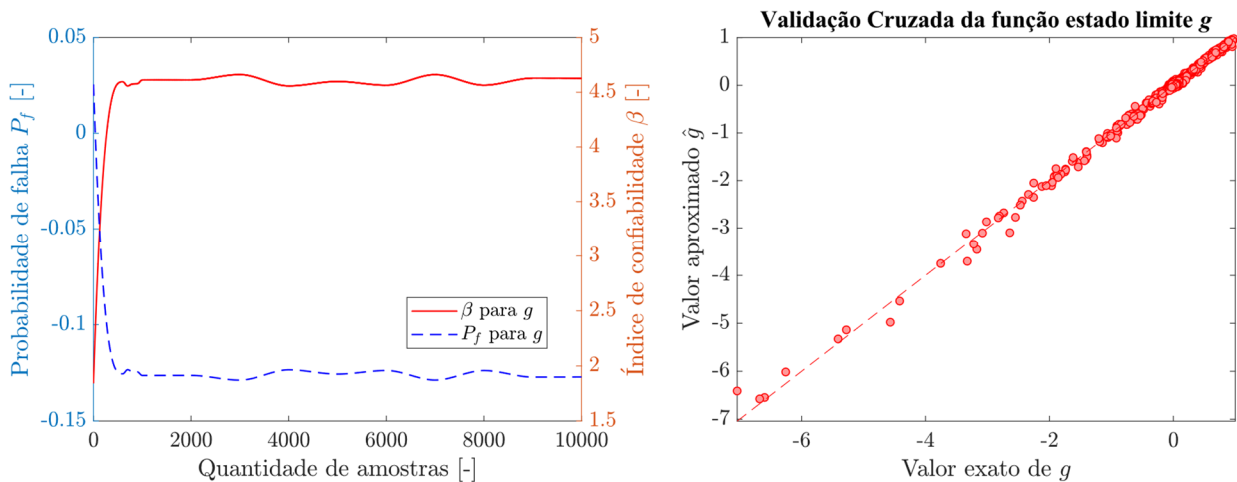


Figura 4 – Definição da quantidade de amostras (E) e validação cruzada (D)

Na Figura 4 à direita é apresentado um estudo de validação cruzada, utilizando método *k-fold* para verificar a precisão do meta-modelo, mostrando que a RNA consegue aproximar adequadamente os valores de $g(X)$. Com a quantidade de amostras definida, chegaram-se nos resultados da Tabela 3.

Tabela 3 – Comparação dos resultados para o problema não linear

Variável	MCS	RNA-MCS	Diferença relativa
	1000000 amostras	800 amostras	
	Valor	Valor	
P_f	2.5286E-02	2.5776E-02	1.938%
CV_{P_f}	6.2087E-03	6.1478E-03	0.981%
β	1.9551E+00	1.9469E+00	0.419%
Tempo (min)	384.69	1.04	99.730%

Percebe-se por esta tabela que o modelo substituto novamente alcançou resultados satisfatórios, com diferenças de valores em torno de 2% em relação ao MCS. É esperado um leve aumento nesta diferença, pois a função avaliada agora é mais complexa e demanda maior tempo de processamento, enquanto o meta-modelo treinado mantém praticamente o mesmo tempo necessário para aproximar os valores da função. Ainda assim, o uso da RNA reduziu em mais de 90% o tempo de processamento, mostrando sua robustez para problemas não lineares. Nota-se que em ambas as simulações os valores de CV_{Pf} foram menores que 5%, indicando que os valores calculados para P_f são confiáveis.

Conclusão

Este trabalho incorporou o uso de redes neurais artificiais em simulações de Monte Carlo a fim de realizar a avaliação da confiabilidade estrutural de uma treliça plana com não linearidades física e geométrica. Com esta metodologia, foi possível obter uma redução de mais de 90% no tempo de processamento, com erros relativos da ordem de 2% ou menores para as estimativas dos índices de confiabilidade e probabilidade de falha da função de estado limite. Assim, a abordagem proposta neste trabalho se mostrou promissora para implementação em análises de confiabilidade em estruturas de maior complexidade, podendo envolver inclusive diversos casos de carregamento, adaptando a arquitetura da rede neural para abrigar mais respostas na camada de saída.

Referências

- BECK, A. T. Confiabilidade e Segurança das Estruturas. Elsevier, 2019.
- DANG, C.; CICIRELLO, A.; VALDEBENITO, M. A.; FAES, M. G. R.; WEI, P.; BEER, M. Structural reliability analysis with extremely small failure probabilities: A quasi-Bayesian active learning method. Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 76, Elsevier, 2024.
- DUBOURG, V.; SUDRET, B.; DEHEEGER, F. Metamodel-based importance sampling for structural reliability analysis. Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 33, p.47-57, Elsevier, 2013.
- FELIPE, T. R. C.; LEONEL, E. D.; HAACH, V. G.; BECK, A. T. Reliability analysis of truss structures considering complete failure paths and using the FLHB model. IBRACON Structures and Materials Journal, Vol. 14, n. 4, 2021.
- GHASEMI, M. R.; CAMP, C. V.; DIZANGIAN, B. Novel decoupled framework for reliability-based design optimization of structures using a robust shifting technique. Frontiers of Structural and Civil Engineering, Vol. 13, p.800-820, Springer Nature, 2019.
- GOMES, H. M. Técnicas de Avaliação da Confiabilidade em Estruturas de Concreto Armado. 2001. 240f. Tese (doutorado em engenharia civil) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.
- GOMES, H. M.; AWRUCH, A. M. Comparison of response surface and neural network with other methods for structural reliability analysis. Structural Safety, Vol. 26, p.49-67, Elsevier, 2004.
- HAYKIN, S. Neural Networks and Learning Machines. Pearson Prentice Hall, 3rd edition, 2009.
- MCGUIRE, W.; GALLAGHER, R. H.; ZIEMIAN, R. D. Matrix Structural Analysis. John Wiley & Sons Inc., 2nd edition, 2014.
- NGUYEN, T. H.; NGUYEN, T. T.; HOANG, D. M.; DANG, V. H.; PHAM, X. D. Efficient reliability analysis method for non-linear truss structures using machine learning-based uncertainty quantification. Computers and Mathematics with Applications, Vol. 182, p.66-83, Elsevier, 2025.
- SUDRET, B. Meta-models for structural reliability and uncertainty quantification. Proceedings in the Fifth Asian-Pacific Symposium on Structural Reliability and its Applications (5APSSRA), 2012.
- VIET-HUNG, T.; SEUNG-EOCK, K. Reliability-based design optimization of nonlinear inelastic trusses using improved differential evolution algorithm. Advances in Engineering Software, Vol. 121, p.59-74, Elsevier, 2018.
- ZHAO, D.; ZHOU, X.; WU, W. A metamodel-based multi-scale reliability analysis of FRP truss structures under hybrid uncertainties. Materials, Vol. 17, n. 1, MDPI, 2024.